ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 9 **August 1929** **Heft 4**

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. K. Friedrichs und Th. v. Kármán: Zur Berechnung freitragender Flügel . 261
E. Müller: Ueber eine graphische Darstellung der Beziehungen an elastisch eingespannten Stäben 270
H. Buchholz: Besondere Probleme der Erwärmung elektrischer Leiter 280
M. Lagally: Die reibungslose Strömung im Außengebiet zweier Kreise 299
K. Uller: Die einfach geführten Kapillar- und Schwerewellen in fließenden Mitteln. I. . . . 305
K. Federhofer: Graphische Kinematik des Taumelscheibentriebes 312
R. Rüdenberg: Die Beurteilung elektrischer Maschinen und Apparate durch Toleranzen auf Grund statistischer Methoden 318
Kleine Mitteilungen. Alexandrow: Ueber Analogie zwischen der Kutta-Joukowskischen Auftriebformel und der Lorentz-Kraft. — Lukin: Ueber eine Invariante in der Statik der Stabwerke. — Beyer: Die Verwendung der Mayor-Misesschen Abbildung in der Theoretischen Mechanik. — Eiger: Differentialgleichung des Spannungszustandes eines Stabes in Motorsymbolik 335
Buchbesprechungen. Birkhoff: Dynamical Systems. — Study: Denken und Darstellung in Mathematik und Naturwissenschaften. — Haas: Atomtheorie. — Miura: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. — Handbuch der Experimentalphysik. — Vivanti: Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen. — Warburg: Lehrbuch der Experimentalphysik für Studierende. — Carson: Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. — Wittenbauer: Aufgaben aus der Technischen Mechanik. — Lundholm: Das Rechnen mit Vektoren in der Elektrotechnik. — Weiter eingegangene Bücher 342
Nachrichten 346

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Berechnung freitragender Flügel.

Von **K. FRIEDRICHS** und **TH. v. KÁRMÁN** in Aachen.

1. Die statische Berechnung des durch Rippenverband versteiften Holmpaares bildete in den letzten Jahren Gegenstand mehrerer Untersuchungen[1]). Es gibt zwei Methoden: entweder kann man das aus Holmen und Rippen bestehende Gebilde als statisch unbestimmtes System auffassen und die in den Knotenpunkten auftretenden Stützmomente oder Auflagerkräfte berechnen, oder aber man ersetzt den Rippenverband durch eine stetig verteilte Koppelung und löst die unter dieser Bedingung erhaltene Differentialgleichung für die Formänderung der Holme. Haben die Holme konstanten oder nach einem einfachen Gesetz veränderlichen Querschnitt, so ist die zweite Methode die einfachere. Wenn indessen diese Voraussetzung nicht zutrifft, so bietet der Uebergang zur Differentialgleichung keinen besonderen Vorteil[2]), insbesondere, wenn die ursprüngliche Aufgabe, die statisch unbestimmten Größen zu finden, geschickt gefaßt wird. Dieser kleine Beitrag zur Statik des freitragenden Flügels hat eben den Zweck, zu zeigen, daß diese Aufgabe keineswegs schwieriger ist als die Berechnung eines einzigen mehrfach gestützten Balkens. Wir zeigen, daß man analog zu den bekannten Clapeyronschen Gleichungen ein System von linearen Gleichungen erhält, deren jede nur drei Unbekannte enthält, so daß das Gleichungssystem schrittweise aufgelöst werden kann.

2. Die Clapeyronschen Gleichungen für einen Einzelträger. Wir wollen zunächst die bekannten Clapeyronschen Gleichungen für einen an einem Ende eingespannten und an n weiteren Stellen gestützten Einzelträger angeben. Denken wir zunächst die Stützen entfernt und die in diesem Falle durch die äußere Last bestimmte

---

[1]) L. Ballenstedt, Der Einfluß der Spante auf die Festigkeit der Holme. Techn. Ber. der Flugzeugmeisterei, Bd. 3 (1917/18), S. 100 bis 111. — K. Thalau, Zur Berechnung freitragender Flugzeugflügel. ZFM 1924, S. 103; 1925, S. 86/87. — Ueber die Verbundwirkung von Rippen im freitragenden, zweiholmigen und verspannungslosen Flugzeugflügel. ZFM 1925, 20. Heft. — B. Biezeno, J. J. Koch und C. Koning, Ueber die Berechnung von freitragenden Flugzeugflügeln. Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 97 bis 105.

[2]) Eine sehr geschickte Methode zur Lösung der Differentialgleichung für den Fall veränderlicher Holmquerschnitte hat H. Reißner angegeben, indem er die Bedingung gleicher Festigkeit in die Gleichung einführt. H. Reißner, Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik. Verbundwirkung des Flügelkörpers. ZFM 1926, S. 181 bis 185.

Momentenlinie durch die Funktion $M(x)$ gegeben. Die durch Einschalten der Stützen $S_0, S_1, S_2 \ldots S_i \ldots, S_{n-1}$ erzeugten Stützmomente sollen mit $\mu_0 = 0, \mu_1 \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n$ bezeichnet werden. Alsdann ist das resultierende Moment zwischen den Stützen S_{i-1} und S_i

$$\mathfrak{M}(x) = M(x) + \mu_{i-1} \frac{l_i - \xi}{l_i} + \mu_i \frac{\xi}{l_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

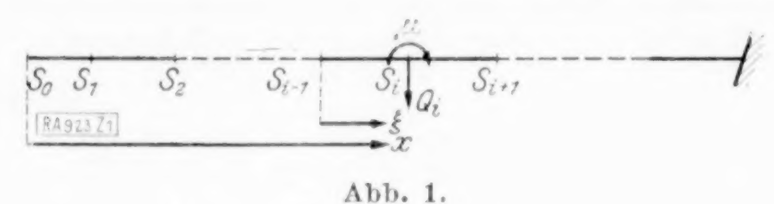


Abb. 1.

wobei $\xi = x - x_{i-1}$, d. h. die Entfernung der Stelle x von der Stütze S_{i-1}, $l_i = x_i - x_{i-1}$ den Abstand von S_i und S_{i-1} bedeuten. Nun läßt sich bekanntlich der Winkel ψ, den die Sehnen AB und BC zwischen drei beliebigen Punkten A, B, C der elastischen Linie einschließen (Abb. 2), durch die Momentenverteilung in folgender Weise ausdrücken:

$$\psi = \frac{y_C - y_B}{l_{BC}} - \frac{y_B - y_A}{l_{AB}} = \frac{1}{l_{BC}} \int_B^C \frac{\mathfrak{M}(x)}{A(x)} (l_{BC} - \xi)\, d\xi + \frac{1}{l_{AB}} \int_A^B \frac{\mathfrak{M}(x)}{A(x)} \xi\, d\xi,$$

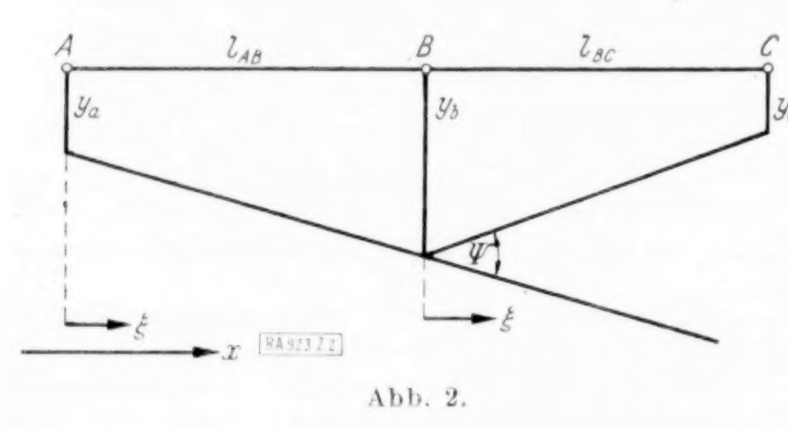


Abb. 2.

wobei l_{AB} und l_{BC} die Abstände zwischen den Punkten A, B bzw. B, C; ξ die laufende Koordinate, jeweilig vom linken Endpunkt A bzw. B aus gerechnet, bezeichnen soll.

Wählen wir als A, B, C drei aufeinanderfolgende Stützpunkte S_{i-1}, S_i, S_{i+1} und führen wir den Wert von $M(x)$ aus Gl. (1) ein, so erhalten wir für die Bedingung, daß die drei Punkte auf einer Geraden liegen:

$$\psi = \frac{1}{l_i} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{\mathfrak{M}(x)}{A(x)} \xi\, d\xi + \frac{1}{l_{i+1}} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{\mathfrak{M}(x)}{A(x)} (l_{i+1} - \xi)\, d\xi = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

oder mit Berücksichtigung von (1)

$$\psi = \frac{1}{l_i} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{M(x)}{A(x)} \xi\, d\xi + \frac{1}{l_{i+1}} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{M(x)}{A(x)} (l_{i+1} - \xi)\, d\xi + \mu_{i-1} \frac{1}{l_i^2} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{(l_i - \xi)\,\xi}{A(x)}\, d\xi$$

$$+ \mu_i \left[\frac{1}{l_i^2} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{\xi^2}{A(x)}\, d\xi + \frac{1}{l_{i+1}^2} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{(l_{i+1} - \xi)^2}{A(x)}\, d\xi \right] + \mu_{i+1} \frac{1}{l_{i+1}} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{\xi\,(l_{i+1} - \xi)}{A(x)}\, d\xi = 0 \quad \ldots \quad (2\,a).$$

3. Ableitung der Clapeyronschen Gleichungen aus dem Satze für das Minimum der Formänderungsarbeit. Bekanntlich ergeben sich die Gl. (2) in einfacher Weise aus der Bedingung, daß die Formänderungsarbeit für eine Momentenverteilung der Form (1) einen Minimalwert erhält. Die Formänderungsarbeit beträgt

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{[\mathfrak{M}(x)]^2}{A(x)}\, d\xi.$$

Die Bedingung des Minimums liefert — unter Berücksichtigung des Umstandes, daß jede der statisch unbestimmten Größen nur in zwei Gliedern der Summe vorkommt —

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i} = \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{\mathfrak{M}(x) \frac{\partial \mathfrak{M}(x)}{\partial \mu_i}}{A(x)}\, d\xi + \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{\mathfrak{M}(x) \frac{\partial \mathfrak{M}(x)}{\partial \mu_i}}{A(x)}\, d\xi = 0$$

oder

$$\frac{1}{l_i} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{\mathfrak{M}(x)\,\xi}{A(x)}\, d\xi + \frac{1}{l_{i+1}} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{\mathfrak{M}(x)\,(l_{i+1} - \xi)}{A(x)}\, d\xi = 0, \qquad \text{d. h. Gl. (2).}$$

4. Die entsprechenden Gleichungen für ein Holmpaar mit Vernachlässigung der Torsion der Rippen. Wir betrachten zunächst den vereinfachten Fall, daß die Rippen als biegungsstarr und ohne merkliche Torsionssteifigkeit angenommen werden können. Für viele praktische Fälle wird diese Annäherung genügen. Außerdem soll der Abstand l der beiden Holme als konstant angenommen werden. Die Rippenabstände $l_0, l_1 \ldots, l_i \ldots, l_n$ können indessen verschieden sein.

Statt der Stützen treten die Knotenpunkte S_i bzw. $\overline{S}_i$ auf (Abb. 3). Die beiden Holme denken wir uns an den Knotenpunkten S_n und $\overline{S}_n$ eingespannt; der Endrippe entsprechend S_0 und $\overline{S}_0$. Die äußere Last sei auf die beiden Holme verteilt. Die Momente, die ohne Rippenverband entstehen würden, sollen mit $M(x)$ und $\overline{M}(x)$, die Querkräfte mit $R(x)$, $\overline{R}(x)$ bezeichnet werden; die wirklichen Momente und Kräfte mit $\mathfrak{M}(x)$, $\overline{\mathfrak{M}}(x)$ bzw. $Q(x)$, $\overline{Q}(x)$, die Zusatzmomente, die in den Knotenpunkten S_i und $\overline{S}_i$ entstehen, mit μ_i bzw. $\overline{\mu}_i$; das Torsionsmoment zwischen der Stelle S_{i-1} und S_i, sowie zwischen $\overline{S}_{i-1}$ und $\overline{S}_i$ mit T_i bzw. $\overline{T}_i$. Die Buchstaben ohne Strich beziehen sich auf den Vorderholm, die mit Strich auf den Hinterholm.

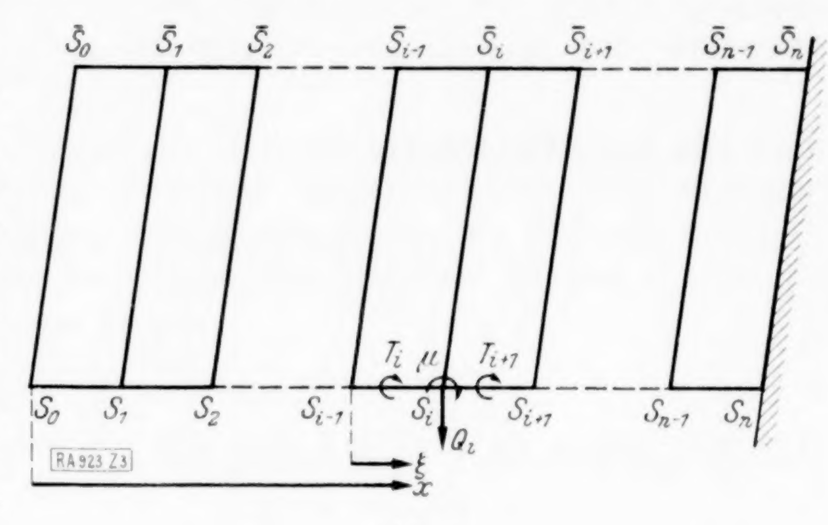


Abb. 3.

Man sieht unmittelbar, daß die Formänderungsarbeit des Systems sich zusammensetzt aus der Biegungsarbeit an den beiden Holmen und aus der Arbeit der Torsionsmomente. Wir schreiben daher

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{[\mathfrak{M}(x)]^2}{A(x)} d\xi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{S}_{i-1}}^{\overline{S}_i} \frac{[\overline{\mathfrak{M}}(x)]^2}{\overline{A}(x)} d\xi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{T_i^2}{B(x)} d\xi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{S}_{i-1}}^{\overline{S}_i} \frac{\overline{T}_i^2}{\overline{B}(x)} d\xi \quad (3),$$

wobei $B(x)$ bzw. $\overline{B}(x)$ die Torsionssteifigkeit der Holme bedeuten.

Wir können vermöge der Gleichgewichtsbedingungen die Größen $\overline{T}$, $\overline{\mu}$ durch T, μ ausdrücken. Wir denken uns das System knapp vor der i-ten Rippe durchgeschnitten. An den Holmquerschnitten wirken die Querkräfte $Q(x_i)$ und $\overline{Q}(x_i)$, die Biegungsmomente $\mathfrak{M}(x)$ und $\overline{\mathfrak{M}}(x)$, schließlich die Torsionsmomente T_i und $\overline{T}_i$. Die Querkräfte sind gleich

$$Q(x_i) = -\frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,x} \quad \text{bzw.} \quad \overline{Q}(x_i) = -\frac{d\,\overline{\mathfrak{M}}}{d\,x}$$

oder, falls wir

$$\mathfrak{M}(x) = M(x) + \mu_{i-1} \frac{l_i - \xi}{l_i} + \mu_i \frac{\xi}{l_i}, \qquad \overline{\mathfrak{M}}(x) = \overline{M}(x) + \overline{\mu}_{i-1} \frac{l_i - \xi}{l_i} + \overline{\mu}_i \frac{\xi}{l_i}. \quad (1)$$

einführen,

$$-Q(x_i) = M'(x_i) + \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{l_i}, \quad -\overline{Q}(x_i) = \overline{M}'(x_i) + \frac{\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_{i-1}}{l_i}.$$

Zunächst folgt aus dem Gleichgewicht der an dem Systemteil zwischen dem freien Ende und dem betrachteten Schnitt wirkenden Biegungsmomente

$$\mathfrak{M}(x_i) + \overline{\mathfrak{M}}(x_i) = M(x_i) + \overline{M}(x_i),$$

d. h.

$$\mu_i + \overline{\mu}_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Alsdann folgt aus dem Gleichgewicht der Torsionsmomente um die vordere Holmachse

$$T_i - \overline{T}_i + \overline{Q}(x_i)\, b = \overline{R}(x_i)\, b,$$

wobei $\overline{R}(x_i)\, b$ offenbar das Torsionsmoment der auf die beiden Holme verteilten äußeren Kräfte um den Vorderholm ist. Nun ist aber $\overline{R}(x) = -\overline{M}'(x)$, so daß wir erhalten

$$T_i - \overline{T}_i - b\,\overline{M}'(x_i) - \frac{\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_{i-1}}{l_i}\, b = -b\,\overline{M}'(x_i)$$

oder

$$T_i - \overline{T}_i = \frac{\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_{i-1}}{l_i}\, b\,.$$

Es ist klar, daß die analoge Betrachtung für das Moment um die Hinterholmachse zu der gleichbedeutenden Beziehung

$$\overline{T}_i - T_i = \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{l_i}\, b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

führt.

Wir denken uns nun in (3) $\overline{\mu}$ und $\overline{T}$ mit Hilfe von (4) und (5) ausgedrückt durch die Größen $\mu_1, \ldots, \mu_n, T_1, \ldots T_n$, die keinen statischen Bedinguugen mehr unterliegen. Der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit liefert dann durch Differentiation nach T_i

$$T_i \int\limits_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{d\,\xi}{B\,(x)} + \overline{T}_i \int\limits_{\overline{s}_{i-1}}^{\overline{s}_i} \frac{d\,\xi}{\overline{B}\,(x)} = 0$$

oder mit den Abkürzungen

$$\int\limits_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{d\,\xi}{B\,(x)} = \frac{l_i}{B_i} \quad \text{und} \quad \int\limits_{\overline{s}_{i-1}}^{\overline{s}_i} \frac{d\,\xi}{\overline{B}\,(x)} = \frac{l_i}{\overline{B}_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

$$\frac{T_i}{B_i} + \frac{\overline{T}_i}{\overline{B}_i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Aus den beiden Gl. (5a) und (6a) ergeben sich T_i und $\overline{T}_i$ zu

$$T_i = -(\mu_i - \mu_{i-1})\,\frac{b}{l_i}\,\frac{B_i}{B_i + \overline{B}_i}\,, \qquad \overline{T}_i = +(\mu_i - \mu_{i-1})\,\frac{b}{l_i}\,\frac{\overline{B}_i}{B_i + \overline{B}_i} \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Formänderungsarbeit der Torsionsmomente beträgt daher für die i-te Strecke

$$\frac{1}{2}\,\frac{T_i^2}{B_i} + \frac{1}{2}\,\frac{\overline{T}_i^2}{\overline{B}_i} = (\mu_i - \mu_{i-1})^2\,\frac{b^2}{2\,l_i}\,\frac{1}{B_i + \overline{B}_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int\limits_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{M\,(x)\,\xi\,d\,\xi}{l_i\,A\,(x)} = p_i\,, \qquad \int\limits_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{M\,(x)\,(l_i - \xi)\,d\,\xi}{l_i\,A\,(x)} = q_i\,, \\
\displaystyle\int\limits_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\xi^2\,d\,\xi}{l_i^2\,A\,(x)} = r_i\,, \quad \int\limits_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\xi\,(l_i - \xi)\,d\,\xi}{l_i^2\,A\,(x)} = s_i\,, \quad \int\limits_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{(l_i - \xi)^2\,d\,\xi}{l_i^2\,A\,(x)} = t_i
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Die entsprechenden Größen für den Hinterholm sollen mit $\overline{p}_i, \overline{q}_i, \overline{r}_i, \overline{s}_i, \overline{t}_i$ bezeichnet werden, ferner nennen wir

$$\frac{l_i}{B_i + \overline{B}_i} = u_i\,.$$

Alsdann ist es klar, daß der Satz vom Minimum der Formänderungsenergie durch Differentiation von (3) nach μ_i unter Beachtung von (1), (4) und (9) die folgende Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}
&p_i + q_{i+1} - \overline{p}_i - \overline{q}_{i+1} + (s_i + \overline{s}_i)\,\mu_{i-1} + (r_i + \overline{r}_i + t_{i+1} + \overline{t}_{i+1})\,\mu_i \\
&\quad + (s_{i+1} + \overline{s}_{i+1})\,\mu_{i+1} + u_i \left(\frac{b}{l_i}\right)^2 (\mu_i - \mu_{i-1}) - u_{i+1} \left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2 (\mu_{i+1} - \mu_i) = 0\,.
\end{aligned}$$

oder geordnet:

$$\begin{aligned}
&\mu_{i-1}\left[s_i + \overline{s}_i - u_i \left(\frac{b}{l_i}\right)^2\right] + \mu_i \left[r_i + \overline{r}_i + t_{i+1} + \overline{t}_{i+1} + u_i \left(\frac{b}{l_i}\right)^2 + u_{i+1} \left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2\right] \\
&\quad + \mu_{i+1}\left[s_{i+1} + \overline{s}_{i+1} - u_{i+1} \left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2\right] + [p_i + q_{i+1} - \overline{p}_i - \overline{q}_{i+1}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11).
\end{aligned}$$

Die Gleichung lautet für den Index $i = n$

$$\mu_{n-1}\left[s_n + \overline{s}_n - u_n \left(\frac{b}{l_n}\right)^2\right] + \mu_n \left[r_n + \overline{r}_n + u_n \left(\frac{b}{l_n}\right)^2\right] + p_n - \overline{p}_n = 0 \quad . \quad . \quad (11\,\mathbf{a}),$$

während in der Gleichung für den Index $i = 1$ $\mu_0 = 0$ zu setzen ist. Dieses System von n Gleichungen für die n Unbekannten $\mu_1, \ldots, \mu_n$ läßt sich etwa so lösen: Aus den ersten $n - 1$ Gleichungen drückt man sich der Reihe nach $\mu_2, \ldots, \mu_n$ durch μ_1 aus. Der Wert von μ_1 selbst wird dann aus der letzten Gl. (11a) berechnet.

Vergleichen wir die Gl. (11) mit Gl. (2), die für den einfachen Träger gilt, so würde die letztere Gleichung mit analogen Bezeichnungen heißen:

$$\mu_{i-1} s_i + \mu_i (r_i + t_{i+1}) + \mu_{i+1} s_{i+1} + p_i + q_{i+1} = 0 .$$

Man sieht, daß man daraus Gl. (11) gewinnen kann, indem man die Größen r, s, t durch $r + \bar{r}$, $s + \bar{s}$, $t + \bar{t}$, die Größen p und q durch $p - \bar{p}$ und $q - \bar{q}$ ersetzt, außerdem aber die von der Torsion der Holme herrührenden Glieder $u_i \left(\frac{b}{l_i}\right)^2$ bzw. $u_{i+1} \left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2$ hinzufügt.

Abgesehen von der Mehrarbeit, die für die Berechnung der Koeffizienten aufgewendet werden muß, ist der Rechnungsgang genau so einfach und durchsichtig, wie beim mehrfach gestützten Einzelträger.

5. Die aus dem Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit abgeleiteten Gleichungen (7), (11) besitzen einfache geometrische Bedeutungen. Bezeichnen wir mit y_i, $\bar{y}_i$ die Durchbiegungen der Knotenpunkte S_i, $\bar{S}_i$ nach unten, so können wir — entsprechend der Annahme der Biegungsstarrheit der Rippen — den Torsionswinkel der Holme in S_i, $\bar{S}_i$ nach außen gleich

$$\varphi_i = \frac{y_i - \bar{y}_i}{b} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varphi}_i = -\varphi_i = \frac{\bar{y}_i - y_i}{b}$$

setzen. Der relative Torsionswinkel der Holme zwischen zwei Knotenpunkten S_i, S_{i-1} bzw. $\bar{S}_i$, $\bar{S}_{i-1}$ ist aber gleich

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{T_i}{B(x)}\, d\,x = \frac{T_i}{B_i}, \qquad \bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_{i-1} = \int_{\bar{S}_{i-1}}^{\bar{S}_i} \frac{\bar{T}_i}{\bar{B}(x)}\, d\,x = \frac{\bar{T}_i}{\bar{B}_i} .$$

Wegen $\varphi_i + \bar{\varphi}_i = 0$, $\varphi_{i-1} + \bar{\varphi}_{i-1} = 0$ folgt daraus die Gl. (7).

Ferner können wir den Winkel zwischen den Sehnen $S_i S_{i+1}$ und $S_i S_{i-1}$ durch

$$\psi_i = -\frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i}$$

und den Winkel zwischen den Sehnen $\bar{S}_i \bar{S}_{i+1}$ und $\bar{S}_i \bar{S}_{i-1}$ durch

$$\bar{\psi}_i = -\frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{l_{i+1}} + \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}}{l_i}$$

ausdrücken; man erkennt daraus die Beziehung

$$\psi_i - \bar{\psi}_i = -\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{l_{i+1}}\, b + \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{l_i}\, b .$$

Die linke Seite ist aber vermöge der Clapeyronschen Gl. (2a) gleich

$$\begin{aligned} &[\mu_{i-1} s_i + \mu_i (r_i + t_{i+1}) + \mu_{i+1} s_{i+1} + p_i + q_{i+1}] \\ &- [\bar{\mu}_{i-1} \bar{s}_i + \bar{\mu}_i (\bar{r}_i + \bar{t}_{i+1}) + \bar{\mu}_{i+1} \bar{s}_{i+1} + \bar{p}_i + \bar{q}_{i+1}] ; \end{aligned}$$

die rechte Seite ergibt sich nach den obigen Gleichungen zu

$$-\frac{b}{l_{i+1}} \frac{T_{i+1}}{B_{i+1}} + \frac{b}{l_i} \frac{T_i}{B_i} .$$

Berücksichtigen wir jetzt die Gl. (4) $\mu_i + \bar{\mu}_i = 0$ und setzen wir vermöge (8) für T_i seinen Wert ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mu_{i-1} (s_i + \bar{s}_i) + \mu_i (r_i + \bar{r}_i + t_{i+1} + \bar{t}_{i+1}) + \mu_{i+1} (s_i + \bar{s}_{i+1}) \\ &+ p_i - \bar{p}_i + q_{i+1} - \bar{q}_{i+1} = u_{i+1} \left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2 (\mu_{i+1} - \mu_i) - u_i \left(\frac{b}{l_i}\right)^2 (\mu_i - \mu_{i-1}) , \end{aligned}$$

d. h. Gl. (11).

6. Das Verhältnis zwischen den Biegungssteifigkeiten der beiden Holme ist konstant. In dem Falle, daß A und $\bar{A}$ zwar veränderlich sind, aber ihr Verhältnis konstant bleibt, läßt sich das Gleichungssystem wesentlich vereinfachen.

Zunächst ist es klar, daß wir statt $r + \bar{r}$, $s + \bar{s}$, $t + \bar{t}$ schreiben können $r(1 + \alpha)$, $s(1 + \alpha)$, $t(1 + \alpha)$, wobei $\alpha = A/\bar{A}$ das Verhältnis der Biegungssteifigkeiten bezeichnet. Ferner wird

$$p_i - \bar{p}_i = \int_{S_{i-1}}^{S_i} \xi \left(\frac{M(x)}{A(x)} d\xi - \frac{\bar{M}(x)}{\bar{A}(x)} d\xi \right) = \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{M(x) - \alpha \bar{M}(x)}{A(x)} \xi \, d\xi = (1 + \alpha) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{M - \bar{M}\alpha}{1 + \alpha} \frac{\xi \, d\xi}{A}.$$

Nun hat $\frac{M - \bar{M}\alpha}{1 + \alpha}$ eine einfache Bedeutung. Denken wir uns nur zwei äußere Kräfte P und $\bar{P}$ bei $x = x'$ am Vorder- bzw. Hinterholm positiv nach unten wirkend angebracht. Die durch diese Kräfte am Schnitt x erzeugten Momente sind $-P(x - x')$ bzw. $-\bar{P}(x - x')$. Nehmen wir an, daß $P/\bar{P} = \alpha$ ist, d. h. daß die Kräfte im Verhältnis der Biegungssteifigkeiten zueinander stehen, so ist der Beitrag dieser Kräfte zu $p - \bar{p}$ gleich Null, d. h. sie fallen aus der Berechnung aus. Dies ist ohne weiteres klar, da in diesem Falle die Kräfte P und $\bar{P}$ eine reine Biegung des Gesamtflügels hervorrufen, somit auf die Stützmomente keinen Einfluß ausüben können. Vereinigen wir P und $\bar{P}$ zu einer Resultierenden, so verhalten sich die Abstände des Angriffspunktes von den beiden Holmen offenbar wie $1 : \alpha$. Diesen Punkt nennen wir den elastischen Mittelpunkt des Flügelschnittes, den geometrischen Ort der Mittelpunkte die elastische Achse. — Lassen wir nun die Bedingung $P = \bar{P}\alpha$ fallen. Das Torsionsmoment der beiden Kräfte um die elastische Achse beträgt $M_t = -\frac{Pb}{1+\alpha} + \frac{\bar{P}b\alpha}{1+\alpha} = -\frac{P - \bar{P}\alpha}{1 + \alpha} b$, so daß wir $\frac{M - \bar{M}\alpha}{1 + \alpha} = M_t \frac{x - x'}{b}$ schreiben können. Wir erhalten daher

$$p_i - \bar{p}_i = -(1 + \alpha) \int_{S_{i-1}}^{S_i} M_t \frac{x - x'}{b} \xi \, d\xi$$

und entsprechend

$$q_i - \bar{q}_i = +(1 + \alpha) \int_{S_{i-1}}^{S_i} M_t \frac{x - x'}{b} (l_i - \xi) \, d\xi.$$

Die Gl. (11) gestaltet sich dann wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{i-1}\left[s_i - \frac{u_i}{1+\alpha}\left(\frac{b}{l_i}\right)^2\right] + \mu_i\left[r_i + t_{i+1} + \frac{u_i}{1+\alpha}\left(\frac{b}{l_i}\right)^2 + \frac{u_{i+1}}{1+\alpha}\left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2\right] \\ &+ \mu_{i+1}\left[s_{i+1} - \frac{u_{i+1}}{1+\alpha}\left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2\right] + \int_{S_{i+1}}^{S_i} M_t (x - x') \frac{\xi}{b} d\xi - \int_{S_i}^{S_{i+1}} M_t (x - x') \frac{(l_{i+1} - \xi)}{b} d\xi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Die beiden letzten Integrale können auch folgendermaßen berechnet werden: Wir ersetzen die Kräfte P und $\bar{P}$ durch eine einzige Kraft P^* am Vorderholm, der um die elastische Achse dasselbe Torsionsmoment ausübt wie die beiden Kräfte zusammen. Alsdann rechnen wir die dieser Belastung entsprechenden Momente $M^*(x)$ aus und bilden die Integrale $p_i^* = \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{M_i^*}{A} \xi \, d\xi$ und $q_{i+1}^* = \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{M^*(l_{i+1} - \xi)}{A} d\xi$. Diese sind mit den obigen Integralen identisch.

7. Rippen mit Torsionssteifigkeit. Der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit ermöglicht auch eine Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit der Rippen. Die Gleichungen erfahren eine zweifache Aenderung. Erstens muß berücksichtigt werden, daß das Moment $\mathfrak{M}(x)$ einen Sprung an den Stellen erleidet, wo die durch die Rippen übertragenen Torsionsmomente angreifen; zweitens muß die Formänderungsarbeit der Rippen zum Ausdruck der Arbeit hinzugefügt werden. Um den Sprung in der Funktion $\mathfrak{M}(x)$ zu berücksichtigen, unterscheiden wir zwischen $\mu_i^{(l)}$ und $\mu_i^{(r)}$, d. h. zwischen dem Stützmoment an der linken bzw. rechten Seite der Rippe, und schreiben statt (1)

$$\mathfrak{M}(x) = M(x) + \mu_{i-1}^{(r)} \frac{l_i - \xi}{l} + \mu_i^{(l)} \frac{\xi}{l_i}.$$

Ferner fügen wir zu dem Ausdruck der Formänderungsarbeit das Glied $\frac{1}{2}\beta_i(\mu_i^{(r)}-\mu_i^{(l)})^2$ hinzu, wobei $\beta_i=\int_0^b\frac{dy}{B_r(y)}$ bedeutet (B_r = Torsionssteifigkeit der Rippe).

Wir erhalten dann durch Differentiation des Ausdrucks für die Formänderungsarbeit nach $\mu_i^{(l)}$ und $\mu_i^{(r)}$ zwei Gleichungen, die folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{array}{l}\mu_{i-1}^{(r)}\left[s_i+\bar s_i-u_i\left(\frac{b}{l_i}\right)^2\right]+\mu_i^{(l)}\left[r_i+\bar r_i+u_i\left(\frac{b}{l_i}\right)^2\right]+(\mu_i^{(l)}-\mu_i^{(r)})\beta_i+p_i-\bar p_i=0\\ \mu_{i+1}^{(l)}\left[s_{i+1}+\bar s_{i+1}-u_{i+1}\left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2\right]+\mu_i^{(r)}\left[t_{i+1}+\bar t_{i+1}+u_{i+1}\left(\frac{b}{l_{i+1}}\right)^2\right]\\ \qquad\qquad+(\mu_i^{(r)}-\mu_i^{(l)})\beta_i+q_{i+1}-\bar q_{i+1}=0\end{array}\right\}\quad(14).$$

(Es ist $\mu_0^{(l)}=0$ und $\beta_n=0$ zu setzen.) Ordnet man diese Gleichungen abwechselnd in eine Reihe, indem man von der unteren mit dem Index $i=0$ ausgeht, bei der oberen Gleichung mit $i=n$ endigt, so hat man wieder ein rekursives System von Gleichungen, in denen nur je drei benachbarte der Unbekannten $\mu_0^{(r)}, \mu_1^{(l)}, \mu_1^{(r)}, \ldots, \mu_n^{(l)}$ auftreten.

8. Weitere Verallgemeinerungen. Das hier entwickelte Verfahren läßt sich ohne weiteres auf den Fall verallgemeinern, daß mehrere, etwa m parallele Holme vorliegen, die durch Rippen verbunden sind. Vermöge der Gleichgewichtsbedingungen lassen sich die Torsionsmomente und die Zusatzbiegemomente eines der Holme durch die entsprechenden Größen der $m-1$ anderen Holme ausdrücken. Aus dem Minimum der Formänderungsarbeit erhalten wir zunächst $m-1$ Gleichungen, aus denen sich die übrigen Torsionsmomente eliminieren lassen, so daß wir schließlich ein System von $m-1$ Gleichungen für $m-1$ Zusatzbiegemomente erhalten, in dem immer nur die Werte in drei benachbarte Knotenpunkte verknüpft sind.

In dem Fall, daß die Holme unter einem Winkel zueinander geneigt sind, erleiden außer den Torsionsmomenten auch die Zusatzbiegemomente in den Knotenpunkten einen Sprung. Aber diejenige Komponente der Resultierenden dieser beiden Momente, die in einer zu den Rippen senkrechten Ebene dreht, geht stetig durch den Knotenpunkt hindurch — sobald wir die Rippe als biegungsstarr annehmen. Für dieses Moment läßt sich wiederum ein System von Gleichungen herstellen, in dem nur seine Werte in drei benachbarten Knotenpunkten miteinander verbunden sind.

9. Ein Beispiel. Als Beispiel behandeln wir den Fall, daß die Steifigkeiten $A, B, \bar A=\frac{1}{\alpha}\cdot A, \bar B$ und die Abstände l der Knotenpunkte konstant sind. Es wird dann

$$r=t=\frac{l}{3}\,\frac{1+\alpha}{A},\qquad s=\frac{l}{6}\,\frac{1+\alpha}{A},\qquad u=\frac{l}{B+\bar B}.$$

Ferner nehmen wir als äußere Last ein Torsionsmoment M_t an, das am freien Ende angreift. In diesem Falle sind auch die Gesamtmomente zwischen zwei Knotenpunkte linear verteilt, und es ist zweckmäßig, unter μ_i die Gesamtbiegemomente zu verstehen. Es gilt dann wieder die Beziehung $\mu_i+\bar\mu_i=0$, aber an Stelle der Gleichgewichtsbedingung (5) besteht die Gleichung

$$\bar T_i-T_i=\frac{\mu_i-\mu_{i-1}}{l}\cdot b-M_t,$$

an Stelle von (8) ergibt sich

$$\frac{T_i}{B}=-\frac{\bar T_i}{\bar B}=\frac{M_t-(\mu_i-\mu_{i-1})}{B+\bar B}\,\frac{b}{l},$$

an Stelle von (11) erhalten wir

$$(\mu_{i-1}+\mu_{i+1})\left(\frac{l}{6}\,\frac{1+\alpha}{A}-\frac{b^2}{l(B+\bar B)}\right)+2\,\mu_i\left(\frac{l}{3}\,\frac{1+\alpha}{A}+\frac{b^2}{l(B+\bar B)}\right)=0 \text{ für } i=1, 2, \ldots, n-1$$

$$\mu_{n-1}\left(\frac{l}{6}\,\frac{1+\alpha}{A}-\frac{b^2}{l(B+\bar B)}\right)+\mu_n\left(\frac{l}{3}\,\frac{1+\alpha}{A}+\frac{b^2}{l(B+\bar B)}\right)-\frac{M_t\,b}{B+\bar B}=0$$

oder

$$\mu_0=0;\quad \mu_{i-1}+\mu_{i+1}=2\,H\,\mu_i;\quad i=1,\ldots,n-1;\quad \mu_{n-1}=H\,\mu_n-\frac{M_t\,l}{b\,(1-{}^1/_3\,\lambda^2\,l^2)},$$

wobei wir

$$H = \frac{1 + {}^1/_3 \lambda^2 l^2}{1 - {}^1/_6 \lambda^2 l^2} > 1\,; \quad \lambda^2 = \frac{(1 + \alpha)(B + \bar B)}{A\, b^2}$$

setzen. Als Auflösung erhalten wir

$$\mu_i = C\, \mathfrak{Sin}\, i\, \varrho,$$

wobei ϱ und C durch die Beziehungen

$$H = \mathfrak{Cof}\, \varrho\,; \quad C = \frac{M_t\, l}{b\, K}\,;$$

$$K = (1 - {}^1/_3\, \lambda^2 l^2)\, \mathfrak{Sin}\, \varrho\, \mathfrak{Cof}\, n\, \varrho$$

bestimmt sind. Den relativen Verdrehungswinkel berechnen wir aus

$$\Delta\, \vartheta_i = \frac{T_i\, l}{B} = \frac{M_t\, l - (\mu_i - \mu_{i-1})\, b}{B + \bar B},$$

und den Gesamtverdrehungswinkel des Holmpaares aus

$$\vartheta_n = \Delta\, \vartheta_1 + \Delta\, \vartheta_2 + \ldots + \Delta\, \vartheta_n = \frac{M_t\, n\, l - \mu_n\, b}{B + \bar B}.$$

Führen wir die Gesamtlänge des Holmes $L = n\, l$ ein, so erhalten wir

$$\vartheta_n = \frac{M_t\, L}{B + \bar B}\left(1 - \frac{\mathfrak{Sin}\, n\, \varrho}{n\, K}\right).$$

Wir wollen nun die Anzahl n der Rippen unter Festhaltung der Gesamtlänge L unbeschränkt wachsen lassen. Dabei streben ϱ und K gegen null. Um die Grenzwerte von $n\,\varrho$ und $n\,K$ zu bestimmen, bemerken wir, daß

$$\frac{n^2\, \varrho^2}{2\, n^2\, (\mathfrak{Cof}\, \varrho - 1)} \to 1, \text{ d. h. } \frac{n^2\, \varrho^2}{n^2\, \lambda^2\, l^2} \to 1\,; \qquad n\, \varrho \to \lambda\, L\,; \qquad n\, \mathfrak{Sin}\, \varrho \to \lambda\, L\,;$$

$$\mathfrak{Sin}\, n\, \varrho \to \mathfrak{Sin}\, \lambda\, L\,; \qquad \mathfrak{Cof}\, n\, \varrho \to \mathfrak{Cof}\, \lambda\, L\,; \qquad n\, K \to \lambda\, L\, \mathfrak{Cof}\, \lambda\, L\,.$$

Wir erhalten also

$$\vartheta_\infty = \frac{M_t\, L}{B + \bar B}\left(1 - \frac{\mathfrak{Tg}\, \lambda\, L}{\lambda\, L}\right)$$

in Uebereinstimmung mit der Formel, die man aus den Differentialgleichungen erhält, welche man bei stetig verteilt gedachter Koppelung anzusetzen hat[1]).

10. Als **weiteres Beispiel** behandeln wir die Verdrehung eines Holmpaares mit veränderlichem Querschnitt und dementsprechend veränderlichen Steifigkeiten, wie sie einer im Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen angestellten experimentellen Untersuchung[2]) zugrunde lag. Die vorliegenden Holme waren etwas gegeneinander geneigt, derart, daß die Rippenlänge auf einer Strecke von 4,5 m von 1,3 m auf 0,85 m abnahm. Wir haben zur Vereinfachung eine mittlere Rippenlänge von 1 m angesetzt. Hieran liegt es, daß die gerechneten Durchbiegungen weiter auseinanderliegen, als die gemessenen, s. Abb. 4. Ferner haben wir ein kürzeres Stück des Flügels,

Zahlentafel I.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
l		50,0	50,5	53,5	56,5	50,0	50,7	50,7	50,7	35,0	cm
A_1	11,3	14,0	16,7	19,6	22,0	25.0	35,0	43,3	46,3	48,3	10^8 cm
A_2	7,8	9,4	10,8	12,4	13,6	15,8	21,8	27,5	29,6	30,7	10^8 »
B_1	1,4	2,35	4,0	7,2	9.2	13,2	18,3	24.8	33,2	40,0	10^7 »
B_2	1,25	2,25	3,8	5,0	6,4	8,2	11,6	17,0	25,6	33,0	10^7 »

[1]) G. Gabrielli. Ueber die Torsionssteifigkeit eines freitragenden Flügels . . . Luftfahrtforschung 2. 3. 1928, S. 79.

[2]) St. v. Fákla, Biegungs- und Torsionssteifigkeit des freitragenden Flügels. Luftfahrtforschung, Band 4, Heft 1. 1928.

das über die Angriffsstelle des Torsionsmomentes hinausragte, weggelassen. Zahlentafel I enthält die Rippenabstände und die Biegungs- und Torsionssteifigkeiten.

Zur Berechnung der durch die Verbundwirkung entstehenden Zusatzbiegemomente verwenden wir die Gl. (11).

Bei Berechnung der hier auftretenden Koeffizienten zeigt sich, daß die von den Biegungssteifigkeiten herrührenden Glieder r, s, t sehr klein sind gegenüber den Größen $u\left(\frac{b}{l}\right)^2$. Trotzdem sind sie nicht zu vernachlässigen, da sie eine merkliche Aenderung der zu berechnenden Größen μ bewirken. Wir schreiben die Gl. (11) in die Form

$$(\mu_i - \mu_{i-1})\, u_i \left(\frac{b}{l_i}\right)^2 - (\mu_{i+1} - \mu_i)\, u_{i+1} \left(\frac{b}{l_i}\right)^2 = -\left[p_i + q_{i+1} - \bar{p}_i - \bar{q}_{i+1}\right]$$
$$- \left[\mu_{i-1}(s_i + \bar{s}_i) + \mu_i (r_i + \bar{r}_i + t_{i+1} + \bar{t}_{i+1}) + \mu_{i+1}(s_{i+1} + \bar{s}_{i+1})\right],$$

aus der man erkennt, daß man sie durch successive Approximation leicht lösen kann, indem man irgend welche Werte für μ in die rechten Seiten einsetzt, successive $\mu_9 - \mu_8, \ldots, \mu_2 - \mu_1, \mu_1$ und daraus die Werte μ selber bestimmt und sodann das Verfahren wiederholt.

Andererseits kann man die Gl. (11) dadurch lösen, daß man von zwei beliebig angenommenen Werten von μ_9 ausgeht, successive $\mu_8, \mu_7, \ldots, \mu_1$ bestimmt und dann so zwischen diesen beiden Werten μ_9 interpoliert, daß auch die letzte Gleichung aus (11) (die dem Index 1 entspricht) erfüllt ist. Wir haben dann mit einem so interpolierten Wert von μ_1, von einem benachbarten Wert ausgehend, umgekehrt successive $\mu_2, \ldots, \mu_9$ bestimmt und wie oben interpoliert. Dieses Verfahren führte deshalb nicht sofort zum Ziel, weil eine geringe Aenderung der angenommenen Werte von μ_9 eine merklich größere Aenderung der errechneten Werte von μ_1 bewirkte.

Die auf diese Weise erhaltenen Zusatzmomente tragen wir im Vergleich mit den Momenten M der außeren Belastung in Zahlentafel II auf.

Zahlentafel II.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
M	50	100,5	154	200,5	250,5	301	352	403	438	10^{-8} kgcm
μ	9	23	45	68	94	121	146	165	171	10^{-8} »
$M-\mu$ . . .	41	77,5	109	132,5	156,5	180	206	238	267	10^{-8} »

Schließlich haben wir durch Ausintegration der so gewonnenen Momentenverteilung $M - \mu$ die Durchbiegungslinien y und y aufgesucht und in Abb. 4 mit der gemessenen

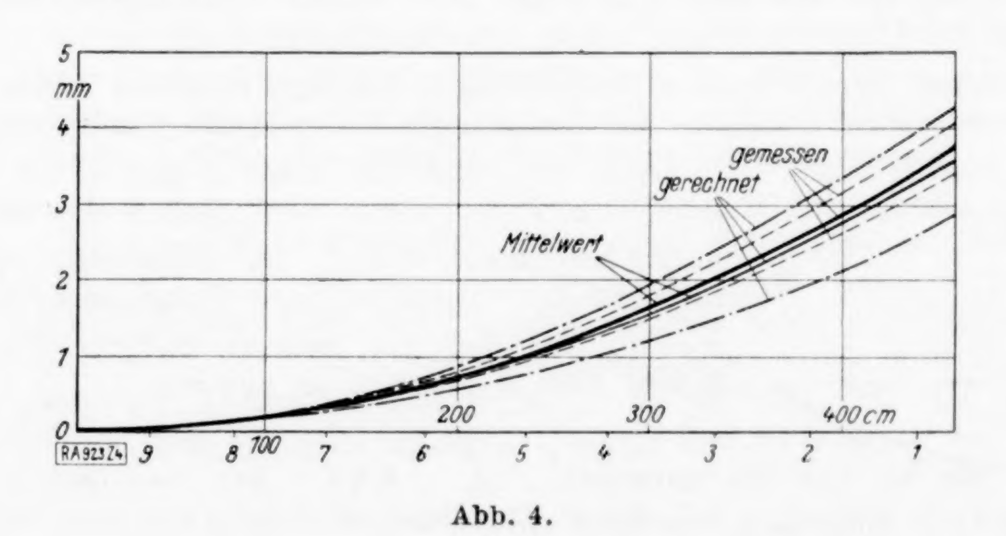


Abb. 4.

Durchbiegungslinie verglichen. Es zeigt sich, daß insbesondere der Mittelwert beider Durchbiegungen, dem der Verdrehungswinkel proportional ist, in guter Uebereinstimmung mit den gemessenen Werten steht.

Ueber eine graphische Darstellung der Beziehungen an elastisch eingespannten Stäben.

Von **EMIL MÜLLER** in Wien.

Im folgenden wird eine meines Wissens noch nicht gebrauchte graphische Darstellung der Beziehungen zwischen der Belastung, den Tangentenwinkeln und den Einspannungsmomenten eines beiderseits elastisch eingespannten Stabes angegeben. Die gewählte Darstellungsart dürfte, selbst wenn sie die ziffernmäßige Berechnung von Einzelfällen nicht erleichtern sollte, insofern von Wert sein, als sie den funktionalen Zusammenhang zwischen den angeführten Größen gut veranschaulicht und namentlich die Auswirkung einer Aenderung der Elastizität der Einspannung leicht zu beurteilen gestattet. Da jeder Stab eines Rahmentragwerkes als beiderseits elastisch eingespannter Balken angesehen werden kann, werden die folgenden Ausführungen auch für die Berechnung von Rahmen von Nutzen sein.

1. Bezeichnungen. Wir betrachten zunächst einen geraden Stab von der Länge l und dem unveränderlichen Trägheitsmoment J, der beiderseits elastisch eingespannt sei. Die Elastizität der Einspannung sei durch die »Einspannungswinkel« $\overline{\varepsilon}$ (links) bzw. $\overline{\varepsilon}'$ (rechts) gekennzeichnet; darunter mögen jene Winkel verstanden werden, um die sich die linke bzw. rechte Einspannungsstelle verdreht, wenn an ihnen die Einspannungsmomente $M = -1 \cdot l$ bzw. $M' = -1 \cdot l$ (Abb. 1) angreifen. Wir wollen im weiteren die Momente stets durch die unbenannten Zahlen

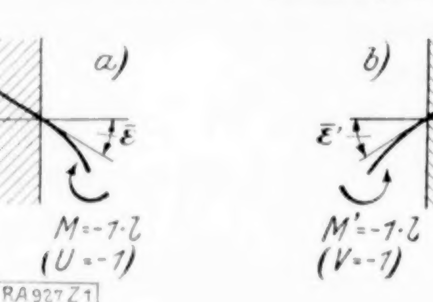


Abb. 1.

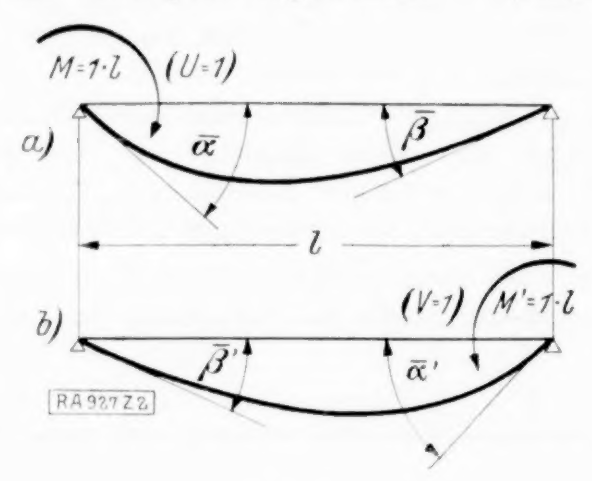


Abb. 2.

$$U = \frac{M}{1 \cdot l}, \quad V = \frac{M'}{1 \cdot l}$$

messen. Die 1 hierin bedeutet die Krafteinheit. Dann können wir sagen: $\overline{\varepsilon}$ und $\overline{\varepsilon}'$ bedeuten jene Winkel, um die sich das linke bzw. rechte Widerlager verdreht, wenn an ihnen die »Angriffe $U = -1$« bzw. »$V = -1$« auftreten.

Wir verstehen ferner unter $\overline{\alpha}$ jenen Winkel, um den sich das linke, unter $\overline{\beta}$ jenen, um den sich das rechte Stabende bei beiderseits freier Auflagerung des Balkens unter dem alleinigen Angriff von $U = 1$ (Abb. 2a) verdreht; unter $\overline{\beta}'$ und $\overline{\alpha}'$ die entsprechenden Winkel unter einem Angriff $V = 1$ (Abb. 2b). Nach dem Maxwellschen Satz ist bekanntlich immer $\overline{\beta} = \overline{\beta}'$, im Sonderfall symmetrisch zur Balkenmitte verlaufender Trägheitsmomente überdies $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}'$; für den von uns vorläufig allein ins Auge gefaßten Fall $J =$ konst. ist zudem

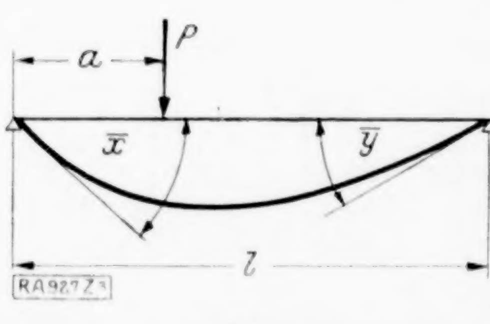


Abb. 3.

$$\overline{\beta} = \overline{\beta}' = \frac{1 \cdot l^2}{6\,E\,J}, \quad \overline{\alpha}' = \overline{\alpha} = \frac{1 \cdot l^2}{3\,E\,J} = 2\,\overline{\beta} \quad . \quad (1).$$

Eine Einzellast P möge an dem frei aufliegenden Balken die Tangentenwinkel $\overline{x}$ und $\overline{y}$ (Abb. 3) hervorrufen. Wenn $P = 1$ ist und in der Entfernung a vom linken Auflager angreift, so ist mit der Bezeichnung

$$a/l = \xi, \quad \overline{x} = \frac{1 \cdot l^2}{6\,E\,J}\,\xi\,(1-\xi)\,(2-\xi), \quad \overline{y} = \frac{1 \cdot l^2}{6\,E\,J}\,\xi\,(1-\xi)\,(1+\xi)$$

oder, wenn man statt $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die unbenannten Zahlen $\bar{x}/\beta = x$, $\bar{y}/\beta = y$ einführt,

$$x = \xi(1-\xi)(2-\xi), \quad y = \xi(1-\xi)(1+\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

x und y sind ersichtlich mit den sogenannten Kreuzlinienabschnitten identisch.

2. Erste Hauptschleife. Tragen wir die zu jeder Stellung der Last $P = 1$ gehörigen Werte x und y als Abszisse und Ordinate in einem rechtwinkligen Achsenkreuz auf, so beschreibt der Punkt (x, y), den wir den Tangentenpunkt nennen wollen, da seine Koordinaten den Tangentenwinkeln proportional, die Schleife einer Kurve 3. Ordnung, die ihren Doppelpunkt im Ursprung hat; denn sowohl zu $\xi = 0$ wie $\xi = 1$ gehört der Punkt $(0,0)$. Wir nennen diese Schleife die erste Hauptschleife. Ihre Gleichung findet man durch Elimination von ξ aus den Gl. (2) zu

$$(x+y)^3 - 3(2x-y)(2y-x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Gestalt der Hauptschleife sowie die Neigungen ihrer Doppeltangenten (»Haupttangenten«) sind aus Abb. 4 zu ersehen. Die Schleife ist zur Winkelhalbierenden $y = x$ symmetrisch; denn wenn ein Punkt (x, y) auf der Schleife liegt, so nach Gl. (3) auch der Punkt (y, x). Zu $\xi = {}^1/_2$ gehört nach (2) der Tangentenpunkt $({}^3/_8, {}^3/_8)$. Legt man in diesem Punkt an die Schleife die Tangente T, so hat diese die Gleichung

$$y + x = {}^3/_4 .$$

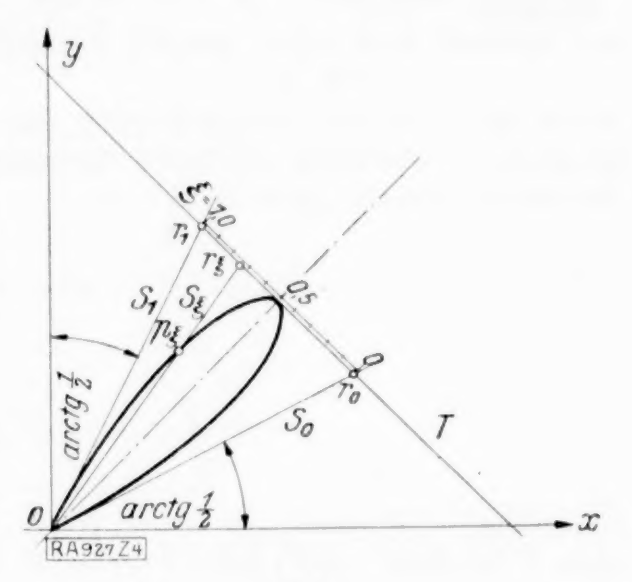


Abb. 4.

Die Gleichung jenes Strahles S_ξ durch den Ursprung, der den zur Laststellung ξ gehörigen Tangentenpunkt p_ξ enthält, ist nach (2)

$$y/x = \frac{1+\xi}{2-\xi}.$$

Als Schnittpunkt von S_ξ mit T erhält man daraus den Punkt

$$r_\xi = \left(\frac{2-\xi}{4}, \frac{1+\xi}{4}\right);$$

d. h. die Koordinaten von r_ξ ändern sich linear mit ξ. Da zu $\xi = 0$ der Punkt $r_0 = ({}^1/_2, {}^1/_4)$, zu $\xi = 1$ der Punkt $r_1 = ({}^1/_4, {}^1/_2)$ gehört, findet man demnach den zu einem beliebigen ξ gehörigen Punkt r_ξ, indem man von r_0 aus auf T eine solche Strecke gegen r_1 zu abträgt, daß $\frac{\overline{r_0 r_\xi}}{\overline{r_0 r_1}} = \xi$, oder bequemer, indem man auf T, wie in Abb. 4, eine ξ-Skala anlegt. Die erste Hauptschleife ersetzt die Einflußlinien beider Kreuzlinienabschnitte; die Zuordnung ihrer einzelnen Punkte zu den Lastorten ξ geschieht mittels der ξ-Skala auf folgende Weise: Man verbindet den zu ξ gehörigen Punkt r_ξ mit o; der Schnittpunkt dieses Strahles mit der Hauptschleife ist der gesuchte Tangentenpunkt p_ξ.

Wirkt an der Stelle ξ anstatt der Einzellast 1 die Last P, so werden beide Tangentenwinkel und damit die Koordinaten des Tangentenpunktes P-mal so groß, d. h. p_ξ rückt auf dem Strahle $o\,p_\xi$ in die P-fache Entfernung vom Ursprung.

Nun mögen auf den Balken mehrere Einzellasten $P_1, P_2 \ldots P_n$ an den Stellen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ wirken und zu ihnen die auf dem eben beschriebenen Wege zu findenden Tangentenpunkte $p_1, p_2 \ldots p_n$ gehören. Es werde gefragt, welcher Tangentenpunkt p zur ganzen Lastgruppe gehört. Da die Tangentenwinkel unter der Lastgruppe gleich der Summe der Tangentenwinkel infolge der einzelnen Lasten sind, muß die Abszisse von p gleich der Summe der Abszissen von $p_1, p_2 \ldots p_n$ und die Ordinate von p gleich der Summe der Ordinaten von $p_1, p_2 \ldots p_n$ sein. Oder: Der Ortsvektor von p ist gleich der Summe der Ortsvektoren von $p_1, p_2 \ldots p_n$. Bedienen wir uns für die Ortsvektoren der Punkte sowohl hier wie im folgenden der entsprechenden gotischen Buchstaben, so können wir dieses Ergebnis in der Form schreiben

$$\mathfrak{p} = \sum_1^n \mathfrak{p}_i .$$

In Abb. 5 ist der zu drei Lasten $P_1 = {}^1/_2$, $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, die an den Stellen ξ_1, ξ_2, ξ_3 wirken, gehörige Punkt p konstruiert worden.

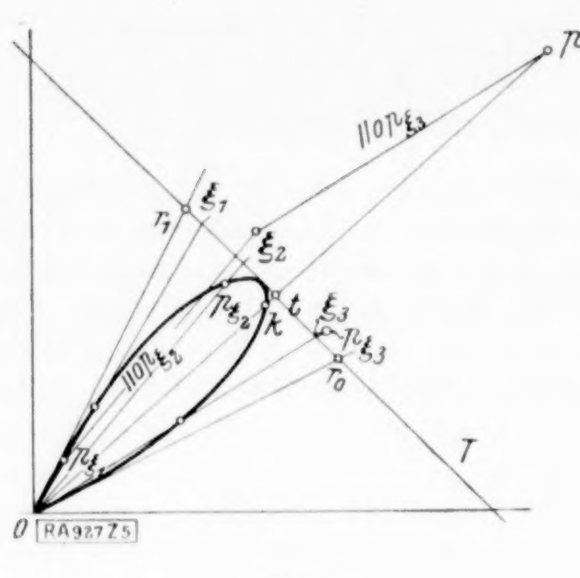


Abb. 5.

Bisweilen[1]) tritt die Frage auf, an welcher Stelle eine Einzellast R angreifen und wie groß sie sein muß, damit sie dieselben Tangentenwinkel wie eine gegebene Lastgruppe hervorrufe (»Ersatzkraft« nach Rieckhof). Die Frage ist nach unseren Darlegungen leicht zu beantworten; denn sie ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Einzelkraft, die p zum Tangentenpunkt hat (Abb. 5). Diese aber findet man, indem man den Strahl op mit T in t und mit der Hauptschleife in k zum Schnitt bringt. Die Lage von t auf der ξ-Skala gibt die Stellung, das Verhältnis $\frac{\overline{o\,p}}{\overline{o\,k}}$ die Größe von R an. Wir wollen uns im weiteren die auf den Stab wirkende Belastung stets durch R ersetzt denken.

Wirkt auf den Träger zwischen den Stellen ξ_1 und ξ_2 eine gleichmäßig verteilte Streckenlast von 1 t/m, so berechnen sich die $\frac{6\,E\,J}{1\cdot l^2}$-fachen Tangentenwinkel gemäß (2) zu

$$x = l\cdot\int_{\xi_1}^{\xi_2}\xi\,(1-\xi)\,(2-\xi)\cdot 1\cdot d\,\xi = l\,\xi^2\left(1-\frac{\xi}{2}\right)^2\Big|_{\xi_1}^{\xi_2},$$

$$y = l\cdot\int_{\xi_1}^{\xi_2}\xi\,(1-\xi)\,(1+\xi)\cdot 1\cdot d\,\xi = l\,\frac{\xi^2}{2}\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)\Big|_{\xi_1}^{\xi_2}.$$

Hat die Streckenlast die Größe $p\ t/m$, so rückt der Tangentenpunkt wieder auf dem durch den Ursprung und den Punkt (x, y) gehenden Strahl in die p-fache Entfernung vom Ursprung.

Greift an dem linken Ende eines frei aufliegenden Balkens $U = 1$ an, so treten die Tangentenwinkel $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ auf. Tragen wir als Abszisse und Ordinate der durch Momente hervorgerufenen Tangentenpunkte wieder das $\frac{6\,E\,J}{1\cdot l^2}$-fache der wirklichen Winkel auf, so folgt aus (1), daß zu $U = 1$ die Werte $x = 2$, $y = 1$, also der Tangentenpunkt $m = (2, 1)$ gehört. Analog gehört zu $V = 1$ der Tangentenpunkt $m' = (1, 2)$. m und m' nennen wir die ersten Hauptpunkte; sie liegen auf den Doppeltangenten der Hauptschleife. Ist U nicht gleich 1, so rückt m auf $o\,m$ in die U-fache Entfernung von o; der Ortsvektor dieses Punktes ist demnach das U-fache des Ortsvektors von m, also $U\,\mathfrak{m}$. Analoges gilt natürlich von m' und V. Wirken U und V gleichzeitig, so ist der Ortsvektor des zu dieser Belastung gehörigen Tangentenpunktes $U\,\mathfrak{m} + V\,\mathfrak{m}'$.

Tritt infolge Auflagersenkungen ein Stabdrehwinkel $\overline{\psi}$ auf, so werden hierdurch am frei aufliegenden Balken Tangentenwinkel $\overline{\psi}$ und $-\overline{\psi}$ hervorgerufen, denen ein Tangentenpunkt $(\psi, -\psi)$ zuzuordnen ist; hierin bedeutet entsprechend den übrigen Fällen

$$\psi = \overline{\psi}\cdot\frac{6\,E\,J}{1\cdot l^2}.$$

3. Endmomente des elastisch eingespannten Stabes. Diese befriedigen bei einem Stab mit konstantem J, dessen Belastung durch R ersetzt wird, die Gleichungen[2])

$$U\,(\overline{\alpha}+\overline{\varepsilon}) + V\,\overline{\beta} = -\,\overline{x}\,, \qquad U\,\overline{\beta} + V\,(\overline{\alpha}+\overline{\varepsilon}') = -\,\overline{y}\,.$$

Dividiert man sie durch $\overline{\beta}$ und führt

$$\varepsilon = \frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{\beta}}\,, \qquad \varepsilon' = \frac{\overline{\varepsilon}'}{\overline{\beta}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

ein, so erhält man

$$U\,(2+\varepsilon) + V + x = 0\,, \qquad U + V\,(2+\varepsilon') + y = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (5).$$

[1]) Rieckhof, Experimentelle Statik, Anhang II (S. 110) und III (S. 122).

[2]) Vergl. z. B. Straßner, Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke, 2. Aufl., I. Bd., S. 5, Gl. (3).

Führen wir die Punkte $e = (2 + \varepsilon, 1)$, $e' = (1, 2 + \varepsilon')$ bzw. ihre Ortsvektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ und für den Ortsvektor des Punktes (x, y) wie oben $\mathfrak{p}$ ein, so lassen sich die Gl. (5) zu einer Vektorgleichung zusammenfassen, die lautet:

$$U\mathfrak{e} + V\mathfrak{e}' + \mathfrak{p} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Die Gleichung zeigt, daß U und V aus $\mathfrak{p}$ gefunden werden können, indem man $\mathfrak{p}$ nach den Richtungen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ zerlegt (Abb. 6). Denn erhält man dadurch die Komponenten $\overline{o\,k}$ und $\overline{o\,k'}$, so ist

$$U = -\frac{\overline{o\,k}}{\overline{o\,e}}, \qquad V = -\frac{\overline{o\,k'}}{\overline{o\,e'}}.$$

Zum Beweise setze man diese Werte in (6) ein und beachte, daß $-\frac{\overline{o\,k}}{\overline{o\,e}}\,\mathfrak{e} = -\mathfrak{k}$, $-\frac{\overline{o\,k'}}{\overline{o\,e'}}\,\mathfrak{e}' = -\mathfrak{k}'$, wenn $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ wieder die Ortsvektoren von k und k' bedeuten. Dann sieht man, daß $\mathfrak{p}$, $-\mathfrak{k}$ und $-\mathfrak{k}'$ ein geschlossenes Dreieck bilden, also ihre Summe verschwindet.

Aus der Abbildung ist ferner leicht zu ersehen, daß die Werte $-U$ und $-V$ durch

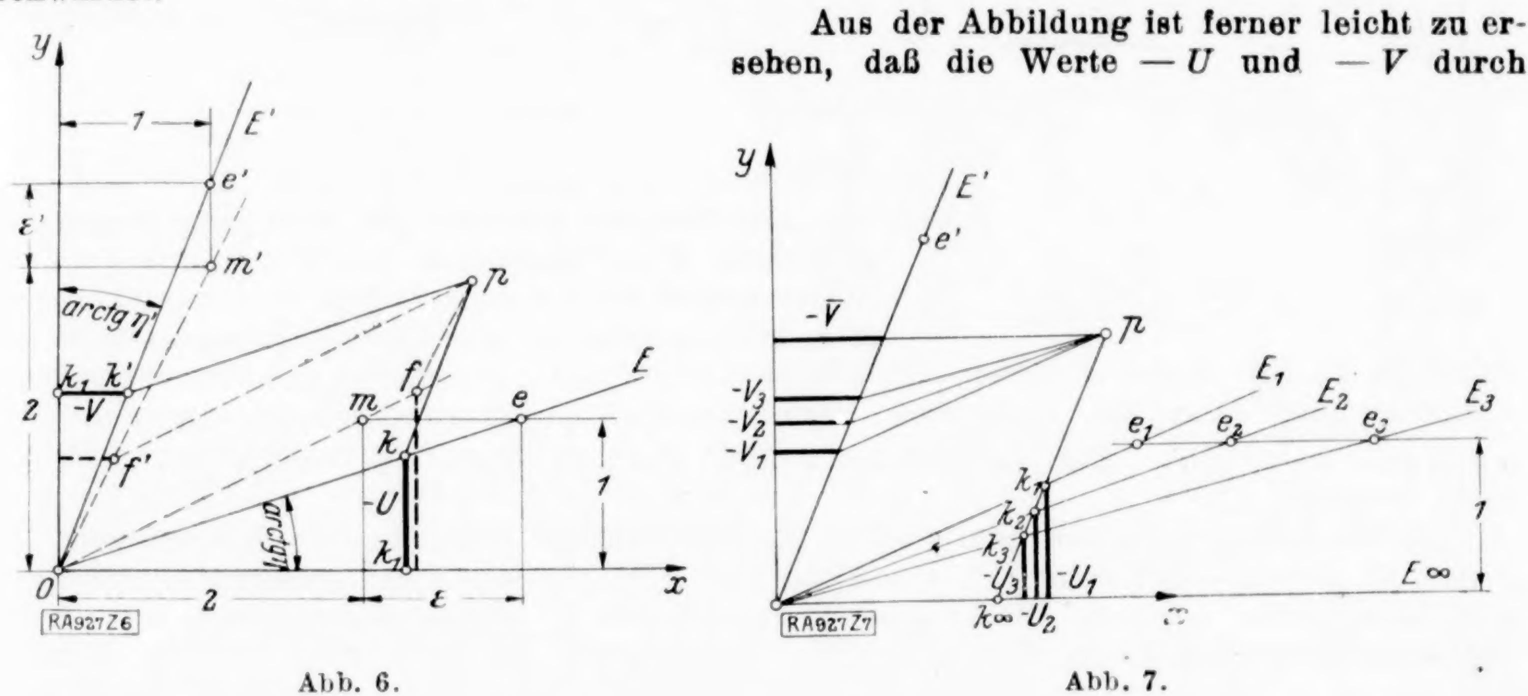


Abb. 6. Abb. 7.

die stark ausgezogenen Lote von k auf die Abszissen- und von k' auf die Ordinatenachse gegeben sind; denn es ist beispielsweise

$$\frac{\overline{k\,k_1}}{1} = \frac{\overline{o\,k}}{\overline{o\,e}} = -U.$$

Die zu ein und derselben Belastung bei veränderlichem ε und ε' gehörigen U, V sind dadurch übersichtlich dargestellt. Man hat $\mathfrak{p}$ nur nach andern Richtungen E, E' zu zerlegen. Der Punkt e liegt immer auf der Geraden $y = 1$, der Punkt e' auf der Geraden $x = 1$.

Im Sonderfall beiderseits fester Einspannung ist $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, d. h. e und e' fallen mit den Hauptpunkten m und m' zusammen; die Strahlen E und E' gehen in die Doppeltangenten $o\,m$ und $o\,m'$ über. Die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ nach deren Richtungen liefert die Punkte f und f' und die Lote von diesen auf die entsprechenden Achsen (stark gestrichelte Strecken) die den Einspannungsmomenten proportionalen Größen $-U$, $-V$.

Im Falle beiderseits freier Auflagerung wird $\varepsilon = \varepsilon' = \infty$; E und E' fallen mit den Koordinatenachsen zusammen. Die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ nach den Achsen liefert Punkte auf den Achsen selbst; somit wird, wie es sein muß, $U = V = 0$.

Aendert sich die Elastizität nur einer Einspannung, z. B. der linken, so bleibt E' unverändert (Abb. 7). Die Punkte k wandern dann auf der durch p parallel zu E' gezogenen Geraden; ihre Abstände von der x-Achse geben das jeweilige $-U$ an. Zu E_∞ (freie Lagerung links) gehört $U = 0$ und das in die Abbildung eingetragene $-\overline{V}$.

4. Transformation der ersten Hauptschleife. Wir stellen uns folgende Aufgabe: Gegeben der zu irgendeiner Belastung gehörige Tangentenpunkt p mit den Koordinaten (x, y) für den frei aufliegenden Balken; gesucht der zu derselben Belastung ge-

hörige Tangentenpunkt q für den Fall elastischer, durch ε und ε' gekennzeichneter Einspannungen. Wir bemerken zunächst folgendes: Da unter einem Angriff $\overline{U} = -1$ links der Tangentenwinkel $\bar{\varepsilon}$ auftritt, verursacht ein Angriff $\overline{U}$ links den Tangentenwinkel $\bar{u} = -\overline{U}\bar{\varepsilon}$ und entsprechend ein Angriff $\overline{V}$ rechts den Tangentenwinkel $\bar{v} = -\overline{V}\bar{\varepsilon}'$. Führen wir wieder die Bezeichnungen $u = \frac{\bar{u}}{\beta}$, $v = \frac{\bar{v}}{\beta}$ ein, so hat der Tangentenpunkt im Falle elastischer Einspannung die Koordinaten

$$u = -U\varepsilon, \qquad v = -V\varepsilon' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

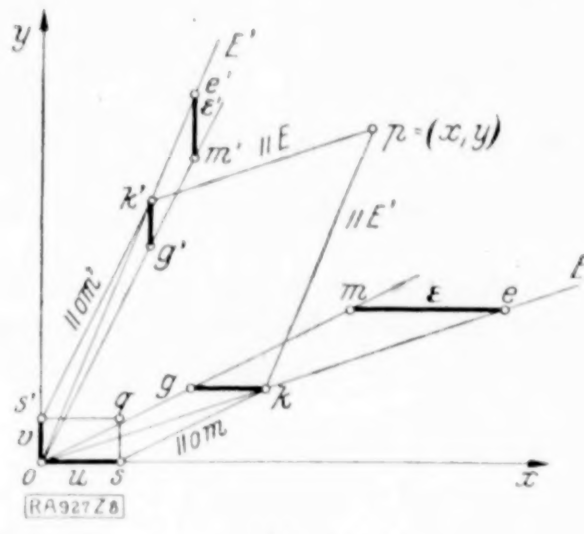


Abb. 8.

Projiziert man nun p parallel zu E' auf E und parallel zu E auf E', so erhält man k und k' (Abb. 8). Der Schnittpunkt der durch k gezogenen Parallelen zur x-Achse mit $o\,m$ heiße g, der Schnittpunkt der durch k' zur y-Achse gezogenen Parallelen mit $o\,m'$ heiße g'. Dann folgt aus Abb. 8:

$$\frac{\overline{g\,k}}{\overline{m\,e}} = \frac{\overline{g\,k}}{\varepsilon} = \frac{\overline{o\,k}}{\overline{o\,e}} = [\text{nach } (7)] = -U;$$

folglich $\qquad \overline{g\,k} = -U\varepsilon = u\,.$

Analog $\qquad \overline{g'\,k'} = v\,.$

Die Strecken $\overline{g\,k}$ und $\overline{g'\,k'}$ sind also gleich den gesuchten Koordinaten von q. Wir finden q selbst, indem wir durch k eine Parallele zu $o\,m$ ziehen und in s mit der x-Achse zum Schnitt bringen, dann die Parallele zu $o\,m'$ durch k' ziehen und ihren Schnittpunkt s' mit der y-Achse bestimmen. s und s' sind dann die Fußpunkte der Lote von q auf die Achsen, da ersichtlich $\overline{o\,s} = \overline{g\,k}$, $\overline{o\,s'} = \overline{g'\,k'}$. Zur Ermittlung von q werden somit die Punkte g und g' gar nicht benötigt.

Wir geben noch den analytischen Zusammenhang zwischen den Koordinaten von q und p, also die zwischen u, v einerseits und x, y anderseits bestehenden Gleichungen an. Bezeichnen wir den Richtungskoeffizienten von E gegen die x-Achse mit η, den Richtungskoeffizienten von E' gegen die y-Achse mit η', so ist

$$\eta = \frac{1}{2+\varepsilon}, \qquad \eta' = \frac{1}{2+\varepsilon'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).[1]$$

Die Koordinaten x_k, y_k von k erhält man aus den Gleichungen

$$x - x_k = (y - y_k)\,\eta', \qquad y_k = x_k\,\eta$$

zu

$$x_k = \frac{x - y\,\eta'}{1 - \eta\,\eta'}, \qquad y_k = \frac{x - y\,\eta'}{1 - \eta\,\eta'}\cdot\eta\,,$$

und hieraus, da $u = \overline{o\,s} = x_k - 2\,y_k$,

$$u = \frac{1 - 2\,\eta}{1 - \eta\,\eta'}(x - \eta'\,y), \qquad v = \frac{1 - 2\,\eta'}{1 - \eta\,\eta'}(y - \eta\,x) \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Die zweite Gleichung geht aus der ersten durch Vertauschung von x mit y und η mit η' hervor. Diese Gleichungen zeigen, daß die Tangentenpunkte des elastisch eingespannten Stabes aus jenen des frei aufliegenden durch eine affine Transformation hervorgehen, bei der, da in den rechten Seiten von (9) absolute Glieder fehlen, der Ursprung sich selbst entspricht. Somit gehen nicht nur Parallelstrahlenbüschel wieder in Parallelstrahlenbüschel, sondern Gerade durch den Ursprung auch wieder in Gerade durch den Ursprung über. Es ist ferner bemerkenswert, daß die Affinität nur von zwei Parametern, η und η', abhängt, demnach bereits durch ein Paar zugeordneter Punkte bestimmt ist.

Die Hauptschleife wird durch die Transformation wieder in eine Schleife mit dem Doppelpunkt im Ursprung übergeführt. Ist die Transformation durch die zwei Strahlen E und E' gegeben, so ist diesen hiemit eine bestimmte Schleife, nämlich jene, in die

[1]) Zur Veranschaulichung dieser Größen sei bemerkt: Bedeutet a den Abstand des linken Festpunktes des Stabes vom linken Widerlager, a' den Abstand des rechten Festpunktes vom rechten Widerlager, so ist $\eta = \frac{a}{l-a}$, $\eta' = \frac{a'}{l-a'}$.

die Hauptschleife bei den durch E und E' definierten Einspannungszuständen übergeht, zugeordnet. Damit ist aber auch eine Zuordnung von E und E' einerseits zu den Doppeltangenten F und F' der zugehörigen transformierten Hauptschleife anderseits bestimmt. Die Abhängigkeit der F und F' von den E und E' ist einer näheren Betrachtung wert.

Für die Punkte der Haupttangente $o\,m'$ ist $y = 2\,x$; setzt man diesen Wert in (9) ein und dividiert die Gleichungen durcheinander, so erhält man die Gleichung der Geraden, in die $o\,m'$ bei der »Transformation η, η'« übergeht, d. h. die Gleichung der Tangente F an die transformierte Hauptschleife zu

$$\frac{v}{u} = \frac{2-\eta}{1-2\,\eta} = \zeta \text{ und dementsprechend für } F' \ldots \frac{u}{v} = \frac{2-\eta'}{1-2\,\eta'} = \zeta' \quad . \quad (10).$$

Hieraus sieht man, daß die eine Haupttangente der transformierten Schleife nur von η, d. h. von E, die andere nur von η', d. h. von E' abhängt.

Ersetzt man in der ersten der Gl. (10) η durch den zugeordneten Wert $\frac{2-\eta}{1-2\,\eta}$, so erhält man

$$\zeta = \frac{2 - \frac{2-\eta}{1-2\,\eta}}{1 - 2\cdot\frac{2-\eta}{1-2\,\eta}} = \eta\,,$$

d. h. dem Strahl E im x, y-System entspricht nicht nur der Strahl F im u, v-System, sondern F als Strahl des x, y-Systems aufgefaßt entspricht auch wieder E im u, v-System. E und F bilden sonach eine Strahleninvolution. Im besonderen sind die x-Achse und die Haupttangente $o\,m'$, die y-Achse und die Haupttangente $o\,m$ Paare zugeordneter Strahlen. Für alle praktisch möglichen Fälle ist $0 < \eta < {}^1/_2$, demnach $2 < \zeta < \infty$; ebenso $0 < \eta' < {}^1/_2$, $2 < \zeta' < \infty$. Wir geben noch eine äußerst einfache und übersichtliche graphische Konstruktion zur Auffindung des zu E gehörigen Strahles F (Abb. 9). Man bringe E mit der Geraden $x = 1$ in a zum Schnitt, ziehe durch den festen Punkt c mit den Koordinaten $({}^2/_5, {}^4/_5)$ den Strahl $c\,a$ und suche dessen Schnittpunkt d mit dem Kreise

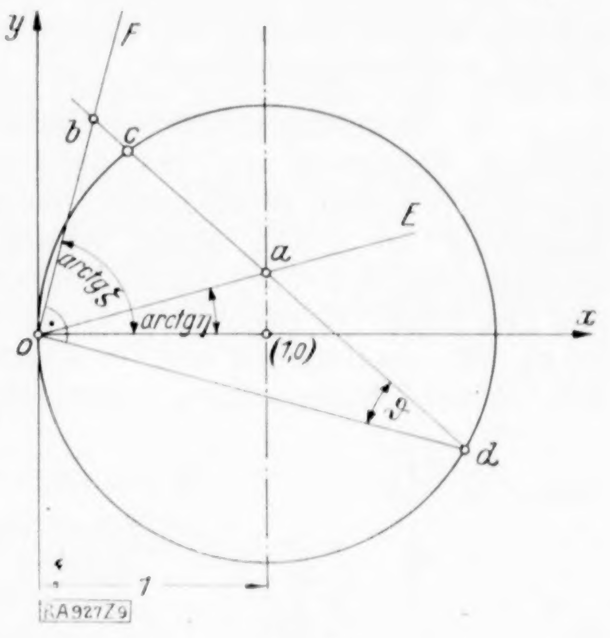


Abb. 9.

$$y^2 + (x-1)^2 = 1\,.$$

Dann steht der gesuchte Strahl F senkrecht auf $o\,d$. Sowohl der Kreis wie der auf ihm liegende Punkt c und die Gerade $x = 1$ brauchen nur einmal gezeichnet zu werden, um die Bestimmung aller Paare entsprechender Strahlen E und F zu ermöglichen. Wird der Punkt d nur durch Einschneiden fixiert, so braucht die Figur durch keine Hilfslinie verunstaltet zu werden.

Beweis: a hat die Koordinaten $(1, \eta)$; folglich ist der Richtungskoeffizient von $c\,a$

$$\varrho = -\frac{4-5\,\eta}{3}\,.$$

F hat den Richtungskoeffizienten ζ, der auf ihm senkrechte Strahl $o\,d$ folglich den Richtungskoeffizienten

$$\sigma = -\frac{1}{\zeta} = [\text{nach } (10)] = -\frac{1-2\,\eta}{2-\eta}\,.$$

Daraus folgt für die Tangente des Kreuzungswinkels von $c\,a$ und $o\,d$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sigma-\varrho}{1+\varrho\,\sigma} = \frac{1}{2}\,.$$

ϑ bleibt also unverändert, wie immer E gezogen wird. Das bedeutet, daß d auf einem Kreis liegt, der durch o und c geht und dessen Halbmesser

$$r = \frac{\overline{o\,c}}{2\sin\vartheta}\,.$$

Da $\overline{o\,c} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ergibt sich $r = 1$. Somit liegt d auf dem oben benutzten Kreis.

Die zu verschiedenen E gehörigen b (Abb. 9) liegen gleichfalls auf einem Kreise, der durch o und c geht, dessen Mittelpunkt aber in den Punkt $(0, {}^{2}/_{5})$ fällt. Seine Verwendung zur Bestimmung von F ist jedoch nicht zu empfehlen, da dabei ziemlich schleifende Schnitte auftreten. Ungünstige Schnitte treten übrigens auch bei der Konstruktion nach Abb. 9 auf, wenn es sich um die Bestimmung der zu verschiedenen E' gehörigen Strahlen F' handelt. Es ist dann angezeigt, F' aus E' auf demselben Wege abzuleiten, wie man in Abb. 9 von F zu E gelangt: Man errichte auf E' ein Lot, bringe es mit dem Kreis in d' zum Schnitt und bestimme den Schnittpunkt a' von $c\,d'$ und $x = 1$. Der Strahl $o\,a'$ ist dann das gesuchte F'. Die Berechtigung zu diesem Vorgang folgt aus der involutorischen Zuordnung der E und F.

Abb. 10 stellt einige zu verschiedenen Strahlenpaaren E, E' gehörige Schleifen dar. Fallen E, E' mit den Koordinatenachsen zusammen, so gehört zu diesem Strahlenpaar die Hauptschleife; nähern sich E, E' den Strahlen $o\,m$, $o\,m'$, so wird die Schleife breiter, und zwar derart, daß mit dem Wegdrehen des Strahles E von der x-Achse sich auch die »obere« Schleifentangente von der x-Achse wegdreht. Der analoge Vorgang spielt sich zwischen E' und der »unteren« Schleifentangente ab. Gleichzeitig wird die Schleife immer kürzer, bis sie beim Zusammenfallen von E, E' mit $o\,m$, $o\,m'$ auf den Ursprung zusammenschrumpft.

5. Transformation beliebiger Punkte. Wir denken uns wieder den zu einer beliebigen Belastung am frei aufliegenden Balken gehörigen Tangentenpunkt $p = (x, y)$ gegeben. Dann tritt unter derselben Belastung im Falle einer »elastischen Einspannung η, η'« der Tangentenpunkt q mit den nach (9) gegebenen Koordinaten (u, v) auf. Lassen wir nun die Elastizität der linken Einspannung unverändert,

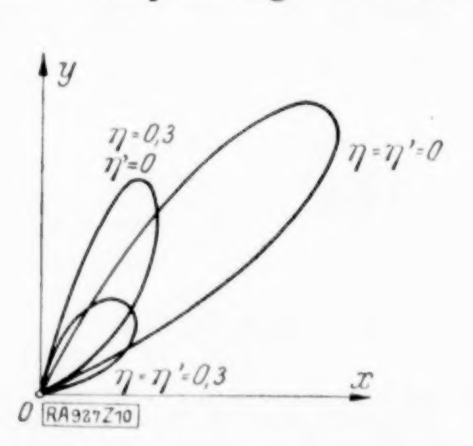


Abb. 10.

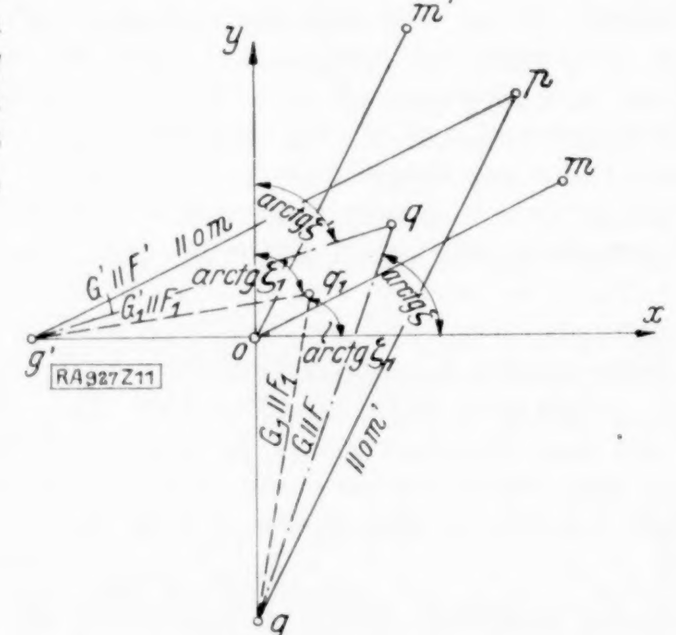


Abb. 11.

setzen also $\eta = $ konst., während wir die Elastizität der rechten Einspannung, also η' alle möglichen Werte durchlaufen lassen, so wird q eine Kurve beschreiben. Wir finden ihre Gleichung durch Elimination von η' aus den Gl. (9) zu

$$v = \frac{2 - \eta}{1 - 2\,\eta}\,u + y - 2\,x = \zeta\,u + y - 2\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die Gleichung stellt eine Gerade dar, die zu F parallel ist und die Ordinatenachse im Abstand $y - 2\,x$ vom Ursprung schneidet. Diesen Schnittpunkt (g in Abb. 11) findet man, indem man durch p eine Parallele zu $o\,m'$ zieht und mit der y-Achse zum Schnitt bringt. Ist also die Elastizität der linken Einspannung durch η gegeben, so liegt q auf der durch g unter der Neigung ζ zur x-Achse verlaufenden Geraden G. Entsprechend gilt: Ist die Elastizität der rechten Einspannung durch η' gegeben, so liegt q auf einer durch g' unter der Neigung ζ' zur y-Achse verlaufenden Geraden G'. Der Schnittpunkt von G und G' liefert demnach q. Aendern sich η und η' in η_1 und η_1', so werden g und g' davon nicht betroffen. Man hat vielmehr durch dasselbe g nur eine neue Gerade G_1 unter einer Neigung ζ_1 zur x-Achse und durch dasselbe g' eine neue Gerade G_1' unter einer Neigung ζ_1' zur y-Achse zu ziehen und findet im Schnittpunkt von G_1 und G_1' den zu η_1, η_1' gehörigen Tangentenpunkt q_1. Die Abbildung zeigt auch, wie man unmittelbar aus dem Tangentenpunkt q, der zu Einspannungen η, η' gehört, den Tangentenpunkt q_1 findet, der zu Einspannungen η_1, η_1' gehört: Man ziehe durch q zwei gerade G und G', deren

Neigungen zur x- bzw. y-Achse ζ bzw. ζ' betragen, und suche deren Schnittpunkte g und g' mit der y- bzw. x-Achse. Durch g und g' ziehe man Gerade G_1 und G_1', deren Neigungen zur x- bzw. y-Achse ζ_1 bzw. ζ_1' betragen. In ihrem Schnittpunkt liegt q_1. Es sei auch hier hervorgehoben, daß bei der praktischen Ermittlung die gezeichneten Hilfslinien nicht wirklich gezogen zu werden brauchen, sondern daß ein Einschneiden genügt.

6. Die zweite Hauptschleife. Zwischen dem beiderseits frei aufliegenden und dem beiderseits fest eingespannten Balken besteht insofern eine Dualität, als sich an den beiden Gebilden Tangentenwinkel und Einspannungsmomente dual entsprechen. Der elastisch eingespannte Balken läßt sich sowohl als ein frei aufliegender auffassen, an dem bestimmte Endmomente angreifen, wie auch als fest eingespannter, dessen Endtangenten bestimmte Verdrehungen erfahren. Der erste Weg wurde im vorhergehenden beschritten, der zweite soll nun verfolgt werden.

Es mögen $\overline{X}$, $\overline{Y}$ die Einspannungsmomente im Falle fester Einspannung bedeuten und wieder die dimensionslosen Größen

$$X = \frac{\overline{X}}{1 \cdot l}, \qquad Y = \frac{\overline{Y}}{1 \cdot l}$$

eingeführt werden. Dann bestehen für eine über den Balken wandernde Last $P = 1$ die Gleichungen[1]

$$X = -\xi(1-\xi)^2, \qquad Y = -\xi^2(1-\xi) \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Trägt man die den einzelnen Laststellungen entsprechenden, zusammengehörigen Werte X, Y wie früher x, y als Abszisse und Koordinate in einem rechtwinkligen Achsenkreuz auf, so beschreibt der »Momentenpunkt« (X, Y) wieder die Schleife einer Kurve 3. Ordnung, die die zweite Hauptschleife genannt sei (Abb. 12). Ihre Gleichung ergibt sich durch Elimination von ξ aus den Gl. (12) zu

$$(X+Y)^3 + X\,Y = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Sie geht durch die Transformation

$$x = -(2X + Y), \qquad y = -(X + 2Y) \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

aus der ersten Hauptschleife hervor. Der Ursprung ist wieder Doppelpunkt; die Doppeltangenten fallen mit den Koordinatenachsen zusammen. Die zweite Hauptschleife ist gleichfalls zur Winkelhalbierenden $y = x$ symmetrisch; sie wird von ihr im Punkt $(-{}^1/_8, -{}^1/_8)$ geschnitten. Projiziert man die Schleifenpunkte aus dem Ursprung auf die Tangente T, so kann man daselbst wieder auf einer linearen Skala (Abb. 12) die zugehörige Laststellung ablesen. Die zu andern Belastungsfällen gehörigen Momentenpunkte werden analog wie die Tangentenpunkte aus der ersten Hauptschleife gefunden. Dreht man die erste Hauptschleife um die Winkelhalbierende $y = -x$ um den Winkel $\arccos(-{}^1/_3)$ aus der x, y-Ebene heraus und projiziert sie dann auf die x, y-Ebene, so erhält man die zweite Hauptschleife. Auf die Wiedergabe der einfachen Rechnung, die dies zeigt, möge verzichtet werden.

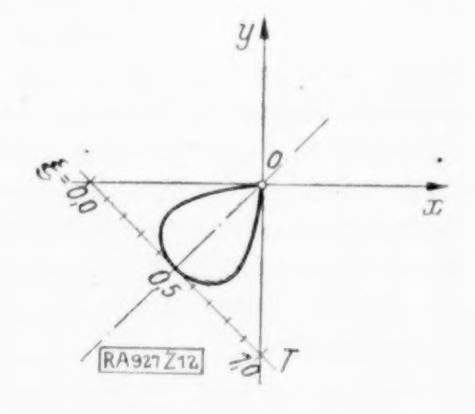


Abb. 12.

7. Bestimmung der Tangentenwinkel aus der zweiten Hauptschleife. Setzt man in (5) gemäß (7) $U = -u/\varepsilon$, $V = -v/\varepsilon'$ und für x und y die Ausdrücke (14), so erhält man die Gleichungen

$$u\left({}^2/_3 + 1/\varepsilon\right) - v/3 + X = 0, \qquad -u/3 + v\left({}^2/_3 + 1/\varepsilon'\right) + Y = 0 \quad \ldots \quad (15).$$

Vergleicht man sie mit (5), so sieht man, daß u und v aus dem Punkt (X, Y) auf dieselbe Weise gefunden werden können wie (Abb. 6) U und V aus (x, y); nur treten an Stelle der dort benutzten Punkte e und e' entsprechend den andern Beiwerten von u und v zwei Punkte $g = ({}^2/_3 + 1/\varepsilon, -{}^1/_3)$, $g' = (-{}^1/_3, {}^2/_3 + 1/\varepsilon')$. Die Rolle der Punkte m und m' übernehmen hier zwei Punkte $n = ({}^2/_3, -{}^1/_3)$, $n' = (-{}^1/_3, {}^2/_3)$. E und E' sind durch zwei Strahlen G und G' zu ersetzen, die vom Ursprung nach g und g' führen. Ihre Richtungskoeffizienten bezüglich der x- bzw. y-Achse sind

$$\gamma = -\frac{\varepsilon}{2\varepsilon + 3}, \qquad \gamma' = -\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon' + 3} \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

[1] Vergl. z. B. Bleich-Melan, Taschenbuch f. Ing. u. Arch., 1. Aufl., S. 217, Nr. 20.

Aus Abb. 6 ist unmittelbar abzulesen

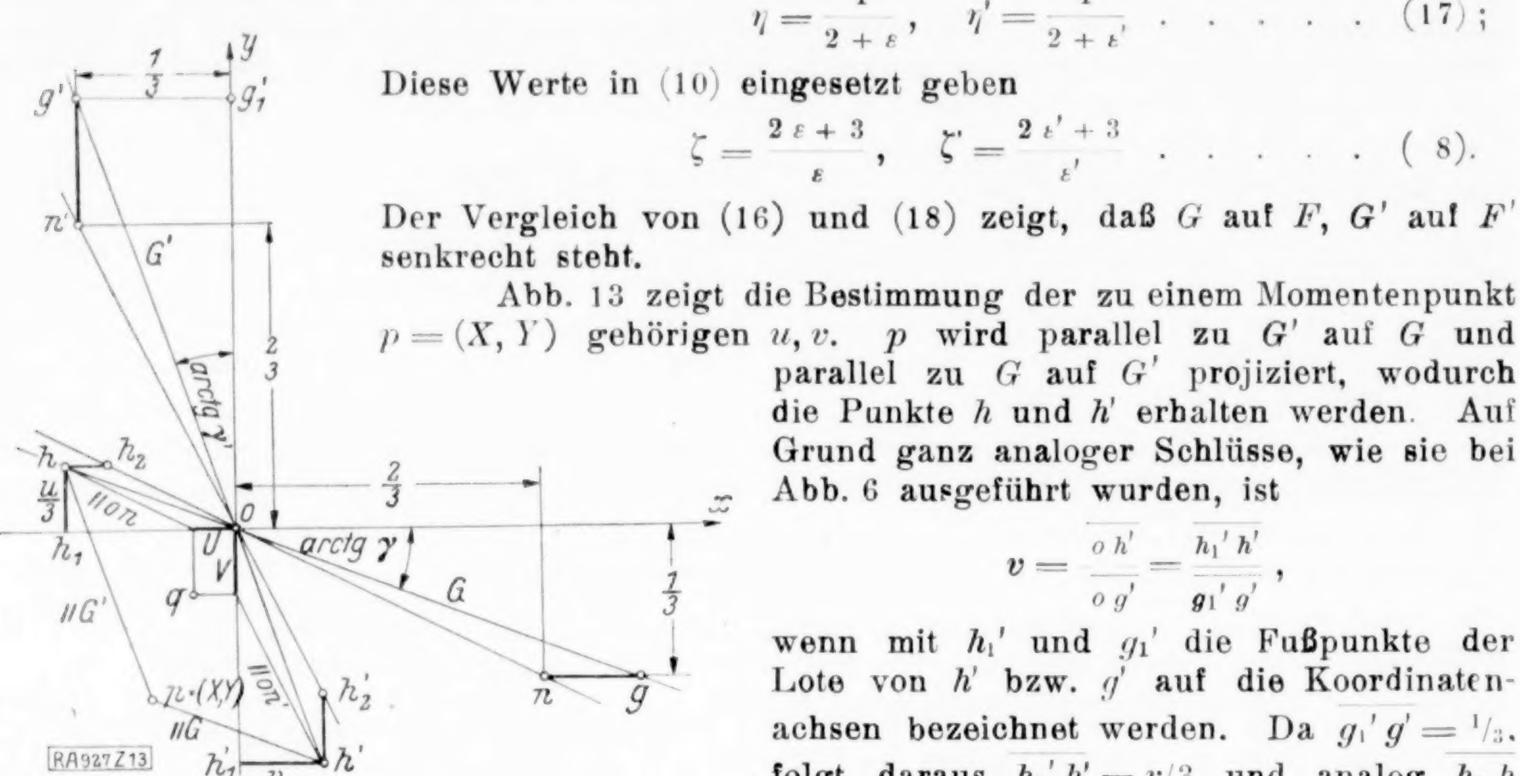


Abb. 13.

$$\eta = \frac{1}{2+\varepsilon}, \quad \eta' = \frac{1}{2+\varepsilon'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17);$$

Diese Werte in (10) eingesetzt geben

$$\zeta = \frac{2\,\varepsilon + 3}{\varepsilon}, \quad \zeta' = \frac{2\,\varepsilon' + 3}{\varepsilon'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Der Vergleich von (16) und (18) zeigt, daß G auf F, G' auf F' senkrecht steht.

Abb. 13 zeigt die Bestimmung der zu einem Momentenpunkt $p = (X, Y)$ gehörigen u, v. p wird parallel zu G' auf G und parallel zu G auf G' projiziert, wodurch die Punkte h und h' erhalten werden. Auf Grund ganz analoger Schlüsse, wie sie bei Abb. 6 ausgeführt wurden, ist

$$v = \frac{\overline{o\,h'}}{\overline{o\,g'}} = \frac{\overline{h_1'\,h'}}{\overline{g_1'\,g'}},$$

wenn mit h_1' und g_1' die Fußpunkte der Lote von h' bzw. g' auf die Koordinatenachsen bezeichnet werden. Da $\overline{g_1'\,g'} = {}^1/_3$, folgt daraus $\overline{h_1'\,h'} = v/3$ und analog $\overline{h_1\,h} = u/3$.

8. Transformation der zweiten Hauptschleife. Wir fragen wieder, in welchen Punkt der zum fest eingespannten Stab gehörige Momentenqunkt $p = (X, Y)$ bei elastischer Einspannung $\varepsilon, \varepsilon'$ übergeht. Führt man in (15) die Ausdrücke (7) ein und löst nach U und V auf, so ergibt sich mit Berücksichtigung von (16)

$$U = \frac{1 + 2\,\gamma}{1 - \gamma\gamma'}(X - \gamma' Y), \quad V = \frac{1 + 2\,\gamma'}{1 - \gamma\gamma'}(Y - \gamma X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Daraus folgt, daß auch die zweite Hauptschleife bei elastischer Einspannung eine affine Transformation erleidet, bei der der Ursprung sich selbst entspricht. Die Doppeltangenten der zweiten Hauptschleife sind die Koordinatenachsen. Die Doppeltangenten der transformierten Schleife erhält man demnach in den Strahlen, in die die Achsen durch die Transformation (19) übergehen. Setzt man $Y = 0$ und dividiert die Gl. (19) durcheinander, so findet man den der Abszissenachse entsprechenden Strahl; er hat den Richtungskoeffizienten

$$V/U = \delta = -\frac{\gamma\,(1 + 2\,\gamma')}{1 + 2\,\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,a);$$

und entsprechend mit $X = 0$ den der Ordinatenachse entsprechenden Strahl mit dem Richtungskoeffizienten

$$U/V = \delta' = -\frac{\gamma'\,(1 + 2\,\gamma)}{1 + 2\,\gamma'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,b).$$

Hier ist hervorzuheben, daß die Doppeltangenten der transformierten zweiten Hauptschleife im Gegensatz zu jenen der ersten von den Einspannungsverhältnissen an beiden Stabenden abhängen. Es ändern beide Doppeltangenten ihre Lage, wenn sich auch nur ε oder nur ε' ändert.

Nach (7) ist $\frac{V}{U} = \frac{v}{u}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$. Den auf einem Strahl durch den Ursprung liegenden Punkten (u, v) entsprechen wieder auf einem Strahl durch den Ursprung liegende Punkte (U, V). Im Falle $\varepsilon = \varepsilon'$ liegen die entsprechenden (u, v) und (U, V) auf demselben Strahl durch den Ursprung. Da dies auch für die dem Ursprung benachbarten Punkte gilt, haben in diesem Falle die zu demselben ε gehörigen Tangenten- und Momentenschleifen dieselben Doppeltangenten. Für $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ werden die beiden Schleifen überdies kongruent.

Beispiel. Als Anwendungsbeispiel des vorangehenden möge der über vier Oeffnungen gleicher Stützweite durchlaufende Balken mit konstantem J behandelt werden (Abb. 14). Wir suchen zunächst die ε und ε' jeder Oeffnung. Dazu denken wir uns

am linken Ende der vierten Oeffnung einen Schnitt geführt und daselbst $U_4 = 1$ wirken; dieser Angriff wirkt dann auf die vierte Oeffnung als auf einen frei aufliegenden Balken; der Tangentenwinkel ist daher $\overline{\alpha}$; er ist aber gleichzeitig $\overline{\varepsilon_3'}$. Folglich: $\varepsilon_3' = \frac{\overline{\varepsilon_3'}}{\beta} = \frac{\overline{\alpha}}{\beta} = 2$.

Führt man nun am linken Ende der dritten Oeffnung einen Schnitt und läßt dort $U_3 = 1$ wirken, so würde zu dieser Belastung des Stabes 3, wenn er beiderseits frei aufläge, der Tangentenpunkt m gehören. Da er aber nur links frei aufliegt, rechts jedoch elastisch eingespannt ist (Einspannungswinkel $\varepsilon_3' = 2$), so müssen wir den Punkt m mit Hilfe zweier Strahlen E_3 und E_3' transformieren. E_3 fällt wegen der freien Auflagerung links mit der Abszissenachse zusammen, E_3' nimmt die in Abb. 15 gezeichnete, durch ε_3' bestimmte Lage an. Die Abszisse des zu m gehörigen transformierten Punktes q [1])

Abb. 14.

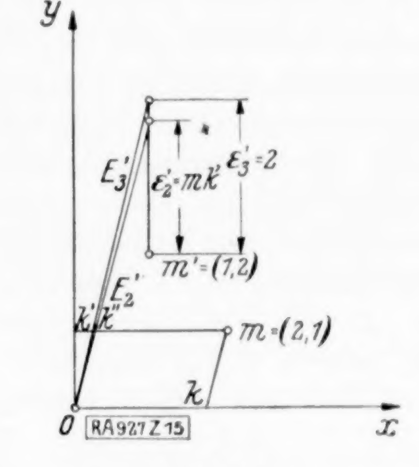


Abb. 15.

gibt das ε_2' an. Man findet sie nach Abb. 8 durch Projektion von m parallel zu E_3' auf die x-Achse in der Strecke $\overline{o\,k}$. Denn der Punkt s der Abb. 8 fällt in unserem Sonderfalle ($E = x$-Achse) mit k zusammen. Statt $\overline{o\,k}$ wird praktischerweise die gleich große Strecke $\overline{m\,k'}$ als ε_2' genommen. Trägt man sie von m' lotrecht nach oben auf und verbindet den so erhaltenen Punkt mit o, so hat man E_2'. In Fortsetzung dieses Verfahrens für die nächste Oeffnung trägt man $\overline{m\,k''} = \varepsilon_1'$ von m' lotrecht nach oben auf und erhält so E_1' [2]). Aus Symmetriegründen liegen die Strahlen E_2, E_3, E_4 symmetrisch zu E_3', E_2', E_1' bezüglich der Geraden $y = x$. E_1 und E_1' fallen mit den Achsen zusammen.

Abb. 16 zeigt die Verwertung der Strahlen E und E' zur Bestimmung der Stützmomente, wenn beispielsweise nur das zweite Feld belastet ist. Ist $\mathfrak{P}$ der Tangentenpunkt für den Fall freier Auflagerung, so findet man durch Projektion von $\mathfrak{P}$ auf E_2 und E_2' und Fällen der Lote auf die Achsen $-U_2$ und $-V_2$, woraus sich M_2 und M_2' durch Multiplikation mit $1 \cdot l$ ergeben. Weiter findet man M_3' ($= M_4$) mittels folgender Ueberlegung: Zu $U_3 = 1$ gehört bei freier Anflagerung des Stabes 3 der Tangentenpunkt m, zu $U_3 = V_2$ jener Punkt m_3, der die Strecke $\overline{o\,m}$ im Verhältnis $V_2 : 1$ teilt [3]). Aus m_3 findet man nach Abb. 7 $-V_3$, indem man durch m_3 eine Parallele zur x-Achse zieht und mit E_3' in k_3' zum Schnitt bringt. Im vorliegenden Fall hätte sich wegen der herrschenden

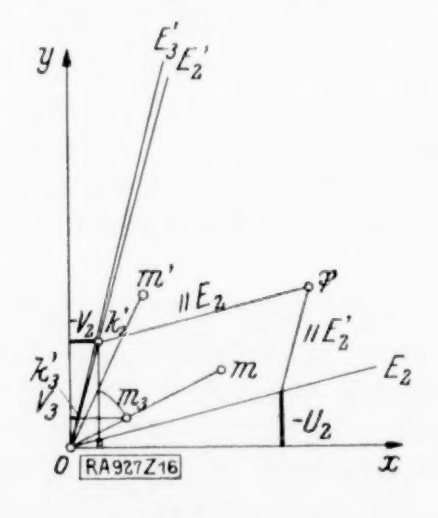


Abb. 16.

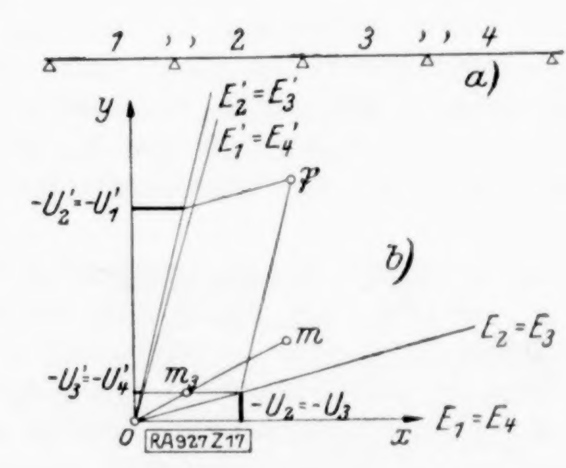


Abb. 17.

[1]) Der Punkt q selbst interessiert nicht und wurde daher in Abb. 15 gar nicht eingetragen.

[2]) E_1' wurde in Abb. 15 nicht eingetragen, da es mit E_2' beinahe zusammenfällt.

[3]) Auf die Vorzeichen der Momente wurde in dem Beispiel nicht geachtet, da sie nicht zweifelhaft sein können und ihre Beachtung nur unnützerweise eine Verlängerung der Strahlen E und E' über den Ursprung hinaus zur Folge gehabt hätte.

Symmetrie die Konstruktion insofern vereinfachen lassen, als M_3' auch durch die doppelt angestrichene Strecke gegeben gewesen wäre. Die Bestimmung der Stützmomente der unbelasteten Oeffnungen erfordert weniger Linien, wenn man die Größen, die sich auf die linken Seiten der mit ungeraden Zahlen und die rechten Seiten der mit geraden Zahlen bezeichneten Oeffnungen beziehen, der x-Achse zuordnet, also ohne Strich beläßt bzw. mit u, U bezeichnet, alle übrigen Größen der y-Achse zuordnet, also mit einem Strich versieht bzw. mit v, V bezeichnet. Für das vorliegende Beispiel ergibt sich dann Abb. 17. In Abb. 16 wurde der umständlichere Vorgang beibehalten, um die Konstruktion in genauem Anschluß an die allgemeinen Erörterungen durchzuführen.

Selbstverständlich steht nichts im Wege, die ε und ε' rechnerisch zu bestimmen und mit ihrer Hilfe die E und E' unmittelbar aufzutragen. Auch können natürlich nach Ermittlung der Stützmomente der belasteten Oeffnung nach dem hier erläuterten Verfahren die weiteren Stützmomente durch Ziehen der Momentenlinien durch die Festpunkte gefunden werden. — Zum Aufsuchen der Einflußlinien der Stützmomente wird man die einzelnen Punkte der ersten Hauptschleife auf die zu der belasteten Oeffnung gehörigen Strahlen E, E' projizieren und aus den so erhaltenen Stützmomenten der belasteten Oeffnung mittels der Festpunkte oder nach Abb. 15 die übrigen Stützmomente bestimmen. Die erste Hauptschleife braucht dazu nur einmal gezeichnet zu werden.

Veränderliches Trägheitsmoment. Bei Stäben mit veränderlichem J ist $\alpha \neq \alpha' \neq 2\beta$; die Hauptschleifen können dann die verschiedensten Formen annehmen. Dennoch liegen die Hauptpunkte m und m', die nun die Koordinaten (α, β) und (β, α') haben, wieder auf den Doppeltangenten der ersten Hauptschleife.

Schlußbemerkung. Zum Schlusse möchte ich nochmals hervorheben, daß ich den Hauptwert der erörterten Zusammenhänge nicht so sehr in einer wesentlichen Erleichterung der Lösung spezieller Aufgaben sehe als vielmehr in der übersichtlichen Darstellung der verschiedenen Abhängigkeiten. Der Gedanke, den verschiedenen elastischen Einspannungen eines Stabes bestimmte affine Transformationen zuzuordnen, gestattet sicherlich noch zahlreiche Folgerungen, die sich als fruchtbar erweisen dürften. 927

Besondere Probleme der Erwärmung elektrischer Leiter.

Von **HERBERT BUCHHOLZ** in Berlin.

A. Allgemeines.

1. Einleitung und Ziel der Arbeit. Zu den gefürchtetsten Folgeerscheinungen schwerer Kurzschlüsse gehören die thermischen Wirkungen der großen Kurzschlußströme. Es liegt in der Natur der Sache, daß sich diese Wärmewirkungen am stärksten an solchen Stellen einer und derselben Kurzschlußbahn bemerkbar machen, wo der Widerstand der Strombahn am größten ist. Solche Stellen größeren Widerstandes bestehen z. B. darin, daß die Enden zweier Leiter wie bei Stromwandleranschlüssen unter Berührung in einer Fläche miteinander verschraubt sind. Die Berührungsflächen zweier solcher Leiterenden sind bekanntlich der Sitz eines besonderen Kontaktwiderstandes. Es finden sich für diesen Fall genügend Beispiele aus der Praxis, wo selbst an anscheinend hinreichend fest verschraubten Kontaktstellen beim Auftreten großer Kurzschlußströme die Leiterenden einfach zerspratzt sind.

Andererseits ist wiederholt beobachtet worden, daß stromführende Leiter, die nicht in Luft liegen, sondern wie die Adern eines Kabels in plastischem Isoliermaterial eingebettet sind, beim kurzzeitigen Durchgang großer Ströme eine geringere Erwärmung erfahren als blanke, in Luft liegende Leitungsseile. Diese Erfahrungstatsache scheint darauf hinzuweisen, daß sich bei derartigen Leitern die Wärmeabfuhr günstiger gestaltet.

Es soll das Ziel der vorliegenden Arbeit sein, die oben skizzierten typischen Fälle der Erwärmung elektrischer Leiter einer eingehenderen rechnerischen Behandlung zu unterwerfen. Vor allem wird dabei der kurzzeitige Erwärmungsvorgang Beachtung finden.

Im Abschnitt B wird zunächst die Erwärmung eines aus zwei Teilen bestehenden, in Luft liegenden, blanken Leiters bestimmt werden, dessen beide Teile in einer Querschnittsebene mit unveränderlichem Kontaktwiderstand zusammenstoßen. Es wird für

diesen Fall das Zeitgesetz des Temperaturanstiegs in seiner Abhängigkeit vom Orte für beliebige Zeiten abgeleitet werden.

Im Abschnitt C wird der Erwärmungsvorgang elektrischer Leiter untersucht werden, die in einem als fest anzusehenden Isoliermaterial eingebettet liegen. Dabei werden zwei verschiedene Querschnittsformen in Betracht gezogen: Ein schmales, hohes Rechteck entsprechend einem Leiter in Gestalt einer hohen Schiene und ein Kreis entsprechend einem zylindrischen Leiter. Für beide Leiterformen wird nur der kurzzeitige Erwärmungsvorgang aus der Anfangstemperatur null heraus behandelt.

2. Die verschiedenen Arten der Wärmeabfuhr. Die Abkühlungsgesetze. Die Wärmeabfuhr heißer Körper gegen eine kältere Umgebung kann bekanntlich drei verschiedene Ursachen haben. Man unterscheidet Wärmeabfuhr durch Strahlung, durch Konvektion und durch Wärmeleitung[1]). Handelt es sich um erwärmte Körper, die in Luft liegen oder von anderen festen Körpern umgeben sind, so hat in den meisten praktischen Fällen bei Temperaturerhöhungen bis zu wenigen hundert Grad die Strahlung nur einen so geringen Anteil an der Wärmeabfuhr, daß man sie nicht besonders in Betracht zu ziehen braucht.

Die Konvektion spielt vor allem eine Rolle, wenn der erwärmte Körper in flüssigen oder gasförmigen Körpern liegt und die Flüssigkeits- oder Gasteilchen eine genügend freie Beweglichkeit haben. Bei der besonderen Natur dieser Art der Wärmeabfuhr ist die ungestörte Entwicklungsmöglichkeit innerer Strömungen für ihre Wirkung wesentliche Voraussetzung. Denkt man z. B. an ein Kabel, dessen Imprägniermasse nach Ueberschreiten einer gewissen Temperatur flüssig wird, so wird in diesem Falle trotz des teilweise flüssigen Zustandes des kühlenden Mittels die Konvektion an der Wärmeabgabe nicht merklich mitwirken, da sich wegen der Papierumhüllungen der Kabeladern keine nennenswerten inneren Strömungen ausbilden können.

Die Wärmeleitung tritt bei gasförmigen und flüssigen kühlenden Körpern in so enge Wechselwirkung mit der Konvektion, daß es nicht möglich ist, die Anteile beider an der Wärmeabfuhr zahlenmäßig zu trennen. Ist dagegen der heiße Körper zunächst unmittelbar von einem festen Körper umgeben, so wird die Wärme von dem heißen Körper allein durch Wärmeleitung fortgeschafft. Allerdings hat diese Art der Kühlung eines heißen Körpers durch einen angrenzenden festen Körper nicht selbständigen Charakter. Sie ist nur als eine Zwischenstufe im ganzen Kühlungsprozeß anzusehen, insofern als auch der kältere, feste Körper einmal an gasförmige oder flüssige Stoffe angrenzt.

Das Gesetz der Wärmeabfuhr durch Konvektion und Wärmeleitung in Gasen oder Flüssigkeiten ist nur ein ziemlich roher Erfahrungssatz. Man nennt dieses Abkühlungsgesetz das Newtonsche. Seine physikalische Bedeutung liegt darin, daß nach ihm zwischen dem warmen Körper und dem gasförmigen oder flüssigen Kühlmittel ein Temperatursprung anzunehmen ist. Es besagt, daß die pro Flächeneinheit und Zeiteinheit abgeführte Wärmemenge der ersten Potenz des Temperaturunterschiedes zwischen Körper und Kühlmittel proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor μ heißt die Wärmeübergangszahl oder äußere Wärmeleitfähigkeit und hat die Dimension $W/cm^2\,{}^0C$. Sein Zahlenwert beträgt in ruhender Luft und bei horizontaler Anordnung z. B. für einen runden, blanken Kupferstab 1,4 ... 1,5 $mW/cm^2\,{}^0C$, für einen schmalen, rechteckigen, blanken Kupferstab 0,9 ... 1,0 $mW/cm^2\,{}^0C$. Die Wärmeübergangszahl ist demnach nicht nur von der Oberflächenbeschaffenheit, sondern auch von der geometrischen Gestalt des warmen Körpers abhängig.

3. Allgemeines über den Erwärmungsvorgang. Die Idealisierung bei kurzzeitigen Erwärmungen. Soll der Erwärmungsvorgang eines beliebigen inhomogenen festen Körpers betrachtet werden, der in seinem Innern irgendwelche Wärmequellen in beliebiger Verteilung enthält und dessen Kühlung an der Oberfläche nach dem Gesetz von Newton erfolgt, so läßt sich diese Aufgabe bekanntlich ganz allgemein in zwei voneinander getrennte Aufgaben zerlegen[2]). Die erste besteht darin, bei der gegebenen Verteilung der Wärmequellen die stationäre Endtemperatur in ihrem örtlichen Verlauf zu bestimmen. Nach der zweiten Aufgabe ist für die so berechnete Temperaturverteilung

[1]) Eine sehr gründliche Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten der Wärmeabfuhr findet sich z. B. bei Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1901.

[2]) Siehe Boussinesq a. a. O., Bd. I.

das zeitliche und örtliche Gesetz der **Abkühlung** desselben Körpers ohne Wärmequellen aufzusuchen. Der wirkliche Verlauf der Erwärmung ergibt sich durch Superposition beider Lösungen. Bei der vorausgesetzten Art der Kühlung errechnet sich stets eine endliche, zeitlich unabhängige Endtemperatur.

Dieses Verfahren könnte auch im Falle eines stromführenden Kabelleiters Anwendung finden, wenn beabsichtigt ist, den Erwärmungsvorgang in seinem ganzen zeitlichen Verlauf zu studieren. Dabei würde natürlich die Dicke des äußeren, isolierenden Körpers den Temperaturverlauf beeinflussen. Interessiert man sich jedoch nur für den Anfang des Erwärmungsvorganges, so wird die Dicke dieses äußeren Körpers, die Beschaffenheit seiner Oberfläche u. a. auf den Temperaturanstieg des inneren, beheizten Leiters wenigstens so lange keinen Einfluß haben, als der Wärmestrom, der in den umgebenden festen Körper durch Wärmeleitung eindringt, dessen äußere Grenzen noch nicht merklich erreicht hat. Es wird dann an sich gleichgültig sein, ob man sich den äußeren, festen Körper als unendlich ausgedehnt oder als begrenzt vorstellt mit irgendeiner besonderen Eigenschaft seiner äußeren Hülle. Wesentlich bleibt nur, daß das Gesetz für den Temperaturanstieg des inneren Leiters, sofern es mit dem unter den wirklichen Verhältnissen geltenden Gesetz übereinstimmen soll, auf genügend kurze Zeiten beschränkt werden muß. Für eine beliebig lange Zeit wird eine solche Uebereinstimmung jedenfalls nicht vorhanden sein. Dächte man sich z. B. den äußeren, festen Körper als unendlich ausgedehnt, so würde mit wachsender Zeit die Temperatur des inneren Leiters mehr und mehr ansteigen, ohne sich jemals einer endlichen Grenztemperatur zu nähern.

Bei der Wärmeabfuhr eines heißen Körpers durch Wärmeleitung in einen anderen festen Körper hinein besteht gegenüber der Kühlung durch ein Gas der wichtige Unterschied, daß in diesem Falle die Temperatur stetig durch die Grenzfläche zwischen dem warmen und dem kühlenden Körper hindurchgeht[1]). Das Energieprinzip verlangt ferner, daß sich an dieser Grenzfläche die Temperaturgefälle in beiden Körpern umgekehrt wie die Wärmeleitfähigkeiten verhalten. Durch diese beiden Vorschriften ist aber der Erwärmungsvorgang unter den angegebenen Einschränkungen eindeutig bestimmt.

Bei stärkeren Erwärmungen des inneren Leiters kann die Schwierigkeit auftreten, daß der äußere, die Wärme abführende, feste Körper bei der Schmelztemperatur eine Aenderung des Aggregatzustandes erfährt. Von dieser besonderen Komplikation, deren Berücksichtigung ähnlich wie bei dem klassischen Problem über das Vordringen des Frostes im Erdreich ganz bedeutende Schwierigkeiten bereiten würde, soll im folgenden abgesehen werden.

4. Die Grundgleichungen der Wärmeleitung. In Rücksicht auf die mathematische Formulierung der Grundgleichungen der Wärmeleitung und wegen der besseren Uebersicht werde zunächst eine Zusammenstellung der in dieser Arbeit einheitlich benutzten Zeichen gebracht. Es sollen bedeuten:

i, I die Stromdichte in A/mm^2 bzw. die Stromstärke in A,
ϱ den mittleren spezifischen Widerstand des Leitermaterials in Ohm mm^2/m,
R den Kontaktwiderstand in Ohm,
Θ, ϑ die zeitlich und örtlich abhängige Uebertemperatur des erwärmten Körpers über die Temperatur der Umgebung oder über die Anfangstemperatur in ^{0}C,
Θ_s, ϑ_s die stationäre Uebertemperatur in ^{0}C,
c die mittlere spezifische Wärme in Ws/cm^3 ^{0}C,
λ die Wärmeleitfähigkeit in W/cm ^{0}C,
μ die Wärmeübergangszahl in W/cm^2 ^{0}C,
F den Querschnitt des elektrischen Leiters in mm^2,
U den Umfang des Leiters in cm,
d die Dicke eines blechförmigen Leiters in cm,
a, r den festen bzw. veränderlichen Radius eines zylindrischen Leiters in cm,
$A^2 = \frac{\lambda}{c}$ das Temperaturleitvermögen in cm^2/s.

Die Indexe i und k an einem dieser Buchstaben werden außerdem, wo es nötig ist, zur Unterscheidung dazu dienen, ob sich die betreffenden Größen auf das als Kühlmittel dienende Isoliermaterial oder auf den geheizten Kupferleiter beziehen.

[1]) Siehe z. B. H. Gröber, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges, Berlin 1921.

Für einen isotropen Körper, dessen Wärmequelle durch die Joulesche Wärme des elektrischen Stroms gebildet wird, lautet bekanntlich die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = A^2 \cdot \Delta \Theta + \frac{\varrho i^2}{c}, \qquad A^2 = \frac{\lambda}{c} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Die drei Körperkonstanten ϱ, c und λ in der Gl. (1) sind nur in erster Annäherung eigentliche Konstanten. In Wirklichkeit hängen sie in mehr oder weniger hohem Maße hauptsächlich von der Temperatur selbst ab. In den weiteren Rechnungen sollen sie jedoch als wirkliche Konstanten behandelt werden.

Das Newtonsche Abkühlungsgesetz für die in das umgebende flüssige oder gasförmige Kühlmittel abgeleitete Wärmestromdichte q lautet in der vorgesehenen Bezeichnungsweise

$$q = \mu \cdot \Theta, \qquad [q] = \mathrm{W/cm^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Dagegen gilt an der Grenze zweier fester Körper für den Wärmeübertritt die Beziehung

$$-\lambda_i \cdot \frac{\partial \Theta_i}{\partial n} = -\lambda_k \cdot \frac{\partial \Theta_k}{\partial n} \quad \ldots\ldots\ldots (3\,a).$$

Zu ihr gesellt sich noch die Forderung des stetigen Temperaturdurchganges durch die Grenzfläche:

$$\Theta_i = \Theta_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3\,b).$$

B. Besonderes Erwärmungsproblem eines blanken Leiters.

Die zeitliche und örtliche Temperaturverteilung in zwei aneinanderstoßenden, blanken Leitern mit konstantem Kontaktwiderstand in der Trennfläche. Leiteranordnungen, bei denen die Enden zweier Leiter stumpf oder verschraubt in einer mehr oder weniger großen Fläche aneinandergrenzen, haben in der Praxis sehr verschiedene Gestalt. Sehr häufig kommt es vor, daß solche Leiterenden etwas überlappt werden und in den sich überlappenden Flächen verschraubt sind. Bei Bürstenschaltern dagegen wird die Bürste stumpf gegen eine metallische Fläche gedrückt. Solange der Erwärmungsvorgang und die Temperaturverteilung hauptsächlich zu Beginn der Erwärmung interessieren, wird es auf die Gestalt der beiden Leiterenden in einiger Entfernung von der Kontaktfläche wenig ankommen, und man wird auf jeden Fall im ungünstigen Sinne rechnen, wenn man für die Untersuchung annimmt, daß die beiden Leiter einen und denselben Querschnitt von der Größe des kleinsten der wirklich vorkommenden Querschnitte haben und sich im übrigen in beliebiger Länge nach beiden Seiten senkrecht zur Kontaktfläche erstrecken.

Die Verteilung der Temperatur über die einzelnen Querschnittsflächen kann bei den üblichen Leiterdimensionen als gleichmäßig vorausgesetzt werden. Wird dann die x-Achse in Richtung der Längserstreckung beider Leiter mit dem Nullpunkt in die Kontaktstelle gelegt, so wird die örtliche Temperaturverteilung nur noch von x abhängen.

Es werde weiterhin die Annahme gemacht, daß an der Grenze des Leiters gegen den ihn umgebenden Luftraum eine Wärmeabfuhr entsprechend dem Newtonschen Abkühlungsgesetz stattfindet. Bei dieser besonderen Annahme lautet dann die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = A^2 \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\varrho i^2}{c} - b_\mu^2 \cdot \Theta \qquad (x \leqq 0) \quad \ldots\ldots (4),$$

worin noch zur Abkürzung gesetzt ist

$$b_\mu^2 = 100 \cdot \frac{U \cdot \mu}{F \cdot c} \qquad [b_\mu^2] = s^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Außer der Gl. (4) hat Θ noch den folgenden Grenzbedingungen zu genügen: Es muß für $t = 0$ und alle $x \leqq 0$ $\Theta = 0$ sein und für $x = 0$ und $t > 0$ $^1/_2\, I^2 R = -\lambda F \cdot (\partial \Theta / \partial x)_{x=0}$. Dabei leitet sich die letzte Bedingung aus der Ueberlegung ab, daß der Wärmestrom, der von der Kontaktstelle aus in jede der beiden Leiterhälften eindringt, sich wegen der angenommenen Symmetrie auf jede Leiterhälfte gleichmäßig verteilt.

Für den stationär gewordenen Endzustand ist die örtliche Temperaturverteilung Θ_s aus früheren Untersuchungen bekannt[1]). Wird noch zur Abkürzung

$$l_r = 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot \lambda}{U \cdot \mu}} \qquad \text{und} \qquad R_r = \frac{\varrho \cdot l_r}{F} \quad \ldots\ldots (6), (7)$$

[1]) S. z. B. Höpp, ETZ 1920, S. 207.

gesetzt mit l_r in m und R_r in Ohm, so lautet sie

$$\Theta_s = \frac{1}{b\mu^2} \cdot \frac{\varrho\, i^2}{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{R_r} \cdot e^{-h x}\right) \qquad (x > 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs des Temperaturanstiegs kann in Gl. (4) eine neue Veränderliche ϑ substituiert werden, die durch $\Theta = \Theta_s + \vartheta \cdot e^{-b\mu^2 t}$ gegeben ist. Darin soll Θ_s die stationäre Endtemperatur nach Gl. (8) sein. Dann geht die Differentialgleichung für ϑ über in die bekannte lineare Wärmeleitungsgleichung ohne Zusatzglied. Die Anfangsbedingung für ϑ lautet jetzt für $t = 0$

$$\vartheta = -\Theta_s = -\frac{1}{b\mu^2} \cdot \frac{\varrho\, i^2}{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{R_r} \cdot e^{\pm h x}\right) \qquad (x \lessgtr 0)$$

und die Grenzbedingung in Rücksicht auf das Verhalten von Θ_s für $x = 0$, $\partial\vartheta/\partial x = 0$ mit $t > 0$.

Die vollständige Lösung der Wärmeleitungsgleichung für ϑ unter Berücksichtigung dieser Grenzbedingungen läßt sich leicht herstellen, indem man von der Partikularlösung[1])

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} B(\beta) \cdot e^{-\frac{(\beta - x)^2}{4 A^2 t}} \cdot d\beta$$

ausgeht, worin $B(\beta)$ eine noch unbekannte Funktion ist. Indem nach Auflösung des einen Integrals der Partikularlösung in zwei Integrale mit den Grenzen $-\infty$, 0 und 0, $+\infty$ versucht wird, zunächst die Randbedingung für $x = 0$ und hinterher noch die Anfangsbedingung zu erfüllen, kommt man schließlich unter Berücksichtigung der Substitutionsgleichung für ϑ für den örtlichen und zeitlichen Verlauf der Leitertemperatur Θ zu dem Ausdruck

$$\Theta(x, t) = \frac{1}{b\mu^2} \cdot \frac{\varrho\, i^2}{c} \cdot \Bigg[1 - e^{-b\mu^2 t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{R_r}\, \mathfrak{Sin}\, h x$$
$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{R}{R_r} \cdot \left\{e^{-h x} \cdot \Phi\left(b\mu \sqrt{t} - \frac{x}{2 A \sqrt{t}}\right) + e^{+h x} \cdot \Phi\left(b\mu \sqrt{t} + \frac{x}{2 A \sqrt{t}}\right)\right\}\Bigg] \qquad (9).$$

Das Funktionszeichen $\Phi(x)$ bedeutet hierin das Gaußsche Fehlerintegral. Die Gl. (9) erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe. Sie vereinfacht sich erheblich für den Temperaturverlauf an der Kontaktstelle selbst. Es wird nämlich für $x = 0$

$$\Theta(0, t) = \frac{1}{b\mu^2} \cdot \frac{\varrho\, i^2}{c} \cdot \left[1 - e^{-b\mu^2 t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{R_r} \cdot \Phi(b\mu \sqrt{t})\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,a).$$

In sehr großer Entfernung von der Kontaktstelle muß der Temperaturanstieg den bekannten exponentiellen Verlauf haben. Tatsächlich folgt aus (9) für $x = \infty$ die Beziehung

$$\Theta(\infty, t) = \frac{1}{b\mu^2} \cdot \frac{\varrho\, i^2}{c} \cdot \left(1 - e^{-b\mu^2 t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,b).$$

Der Unterschied im Temperaturanstieg an der Kontaktstelle und an einer anderen davon genügend weit entfernten Stelle wird besonders deutlich, wenn man noch die Ausdrücke für die Geschwindigkeit des Temperaturanstiegs ermittelt. Man erhält aus Gl. (9) speziell für die Kontaktstelle mit $x = 0$

$$\frac{\partial\, \Theta(0, t)}{\partial t} = \frac{\varrho\, i^2}{c} \cdot e^{-b\mu^2 t} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{R_r} \cdot \frac{1}{b\mu \sqrt{\pi\, t}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

und für eine von der Kontaktstelle sehr weit entfernte Stelle mit $x = \infty$

$$\frac{\partial\, \Theta(\infty, t)}{\partial t} = \frac{\varrho\, i^2}{c} \cdot e^{-b\mu^2 t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,b).$$

Im Nullpunkt der Zeit hat also die Kurve des Temperaturanstiegs an der Kontaktstelle eine senkrechte Tangente.

Für einen Kupferleiter mit rechteckigem Querschnitt von den Dimensionen 10×50 qmm² ist in Abb. 1 unter der Annahme einer Wärmeübergangszahl $\mu = 1$ mW/cm² °C und eines Kontaktwiderstandes $R = 1{,}35 \cdot 10^{-5}$ Ohm der Temperaturanstieg für die Kontaktstelle und für eine zweite, davon sehr weit entfernte Stelle graphisch aufgetragen. Die angegebenen Zahlenwerte entsprechen einem praktischen Fall.

[1]) S. Riemann-Weber, Die Diff.- u. Integralgl. d. Mech. u. Phys., 7. Aufl., Band II, S. 92.

Für Kurzschlußzeiten kann man die in (9 a) auftretenden Funktionen in Reihen entwickeln. Es wird dann angenähert der Temperaturverlauf an der Kontaktstelle wiedergegeben durch

$$\Theta(0, t) \approx i^2 \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{100 \cdot F \cdot R}{\sqrt{\pi \lambda c}} \quad (9\,c).$$

Nimmt man einen kupfernen Leiter an und läßt für die Kontaktstelle in Rücksicht auf die nur vorübergehende Erwärmung eine höchste Uebertemperatur von etwa 175° zu, so erhält man für den höchstzulässigen Kontaktwiderstand R in Abhängigkeit des Leiterquerschnittes, des Kurzschlußstromes und der Kurzschlußzeit die Formel

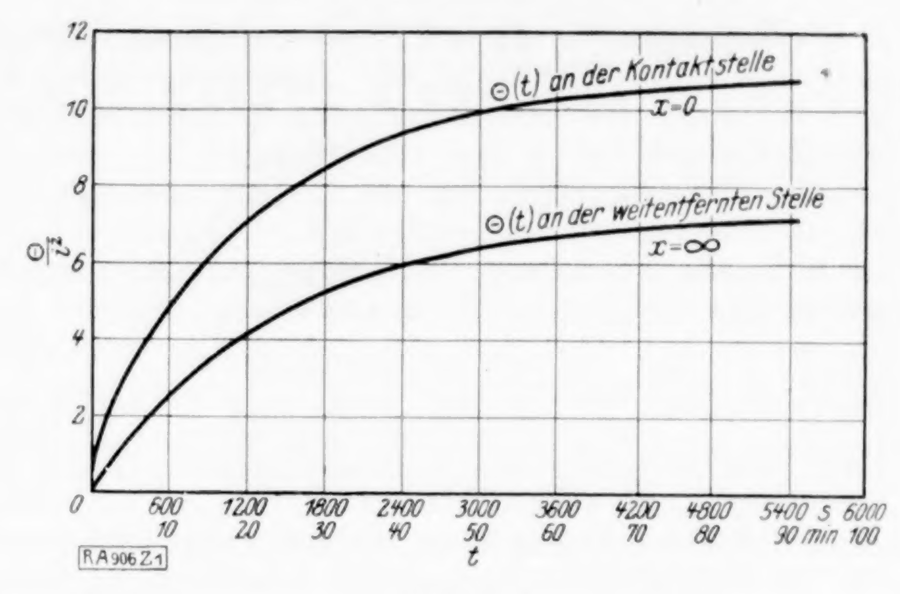


Abb. 1.

$$R \leqq \frac{10 \cdot F}{I^2 \cdot \sqrt{t}} \text{ Ohm (Kupferkontakte)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Es ist damit für die Größe des Kontaktwiderstandes zweier in einer Querschnittsfläche aneinandergrenzender Leiter in Rücksicht auf die Kurzschlußerwärmung eine höchste zulässige Grenze gewonnen.

C. Die Erwärmung elektrischer Leiter in festem Material.

1. Der geradlinig begrenzte Leiter. Für die Untersuchung der Wärmeabfuhr eines geradlinig begrenzten, stromführenden Leiters von sehr großer Länge durch Wärmeleitung in einen angrenzenden festen Körper hinein ist es angebracht, zunächst einen Idealfall zu behandeln, dem unmittelbar keine praktische Bedeutung zukommt. Er sei dadurch ausgezeichnet, daß der stromführende Leiter auch in seinen beiden Querschnittsdimensionen als sehr ausgedehnt aufgefaßt wird.

Im Schnitt stellt sich dieser Leiter als eine geradlinig begrenzte Halbebene dar, während die auf der anderen Seite der Grenzgeraden liegende Halbebene zu dem gleichfalls unendlich ausgedehnten, wärmeabführenden Körper gehört. Selbstverständlich muß bei einer solchen Annahme unbedingt das Temperaturgefälle im Leiter selbst berücksichtigt werden.

a) Die Erwärmung eines mit konstanter Stromdichte beheizten Halbraumes bei Wärmeabfuhr in den angrenzenden festen Halbraum. Die ebene Grenzfläche der beiden Halbräume liege in der yz-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, und zwar der stromdurchflossene Halbraum auf der Seite der negativen x, der die Wärme abführende Halbraum auf der Seite der positiven x. Die Temperatur wird dann örtlich nur wieder von der einen Koordinate x abhängen, und es gilt für die Temperatur Θ_k des beheizten Halbraumes nach (1) die Gleichung

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial t} = A_k^2 \cdot \frac{\partial^2 \Theta_k}{\partial x^2} + \frac{\varrho i^2}{c_k} \quad (x < 0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12),$$

hingegen für die Temperatur Θ_i des wärmeabführenden Halbraumes mit $x > 0$ die einfache lineare Wärmeleitungsgleichung ohne Quellenglied. Die Anfangsbedingung lautet mit $t = 0$: $\Theta_k = 0$ für $x < 0$, $\Theta_i = 0$ für $x > 0$ und die Grenzbedingung mit $x = 0$ und $t > 0$: $\Theta_i = \Theta_k$ und $\lambda_i \cdot (\partial \Theta_i / \partial x) = \lambda_k (\partial \Theta_k / \partial x)$.

Zum Zwecke der Lösung setze man in (12) für Θ_k die neue Veränderliche

$$\Theta_k = \vartheta_k - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varrho i^2}{c_k A_k^2} \cdot x^2 \quad (x < 0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Damit erhält man jetzt auch für ϑ_k die lineare Wärmeleitungsgleichung ohne Zusatzglied, während die Anfangsbedingung für ϑ_k mit $t = 0$ übergeht in

$$\vartheta_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varrho i^2}{c_k A_k^2} \cdot x^2 \quad (x < 0).$$

Dagegen bleiben die übrigen Grenzbedingungen bestehen, indem nur ϑ_k anstelle von Θ_k tritt.

Man kann für ϑ_k und Θ_i eine Lösung herstellen, indem man setzt:

$$\text{für } \vartheta_k: \quad \sqrt{\pi}\cdot\vartheta_k = \int_{-\infty}^{+\infty} B_k(x+2\beta A_k\sqrt{t})\cdot e^{-\beta^2}\,d\beta \qquad (x<0) \quad . \quad . \quad . \quad (13\,\text{a}),$$

$$\text{für } \Theta_i: \quad \sqrt{\pi}\cdot\Theta_i = \int_{-\infty}^{+\infty} B_i(x+2\beta A_i\sqrt{t})\cdot e^{-\beta^2}\,d\beta \qquad (x>0) \quad . \quad . \quad . \quad (13\,\text{b}).$$

Diese beiden Ausdrücke befriedigen jedenfalls die für ϑ_k und Θ_i geltenden Differentialgleichungen. Für $t=0$ folgt aus ihnen

$$\vartheta_k(x) = B_k(x), \qquad \Theta_i(x) = B_i(x).$$

Die Funktionen $B_k(x)$ und $B_i(x)$ sind in Rücksicht auf die Grenzbedingungen bekannt für $x<0$ bzw. $x>0$. Für die jeweils andere Hälfte der Zahlenachse werde willkürlich

$$B_k(x) = f\cdot x^2 \quad (x \geqq 0), \qquad B_i(x) = g\cdot x^2 \quad (x \leqq 0)$$

gesetzt, worin f und g zwei vorläufig noch unbekannte Konstanten sind. Sie lassen sich aber leicht bestimmen, indem man zunächst die Integrale in (13) so in je zwei Integrale zerlegt, daß das Argument der $B_{k,i}$ in ihnen nur positive oder negative Werte durchläuft und dann die Grenzbedingung für $x=0$ berücksichtigt. Man erhält so nach einigen Zwischenrechnungen unter Beachtung der Substitutionsgleichung für ϑ_k und mit den Abkürzungen

$$y_i = \frac{x}{2A_i\sqrt{t}} \quad (x>0) \quad (14\,\text{a}), \qquad y_k = \frac{x}{2A_k\sqrt{t}} \quad (x<0) \quad . \quad . \quad . \quad (14\,\text{b}),$$

$$F(y) = (1+2y^2)\cdot[1-\Phi(y)] - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot y\cdot e^{-y^2} \quad \text{mit} \quad F(0)=1 \quad . \quad . \quad (14\,\text{c})$$

für die örtliche und zeitliche Temperaturverteilung Θ_k und Θ_i im beheizten und im wärmeabführenden Halbraum die Ausdrücke

$$\Theta_i(x,t) = \Theta_0(t)\cdot F(y_i) \qquad (y_i \geqq 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,\text{a}),$$

$$\Theta_k(x,t) = \Theta_0(t)\cdot\frac{A_k\lambda_i}{A_i\lambda_k}\left[1+\frac{A_i\lambda_k}{A_k\lambda_i} - F(|y_k|)\right] \qquad (y_k \leqq 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,\text{b}).$$

$\Theta_0(t)$ ist hierin die Temperatur in der Grenzfläche für $x=0$. Sie ist gegeben durch

$$\Theta_0(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k}\cdot\frac{A_i\lambda_k}{A_k\lambda_i + A_i\lambda_k}\cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Es steigt also die Temperatur in der Grenzfläche direkt proportional mit der Zeit.

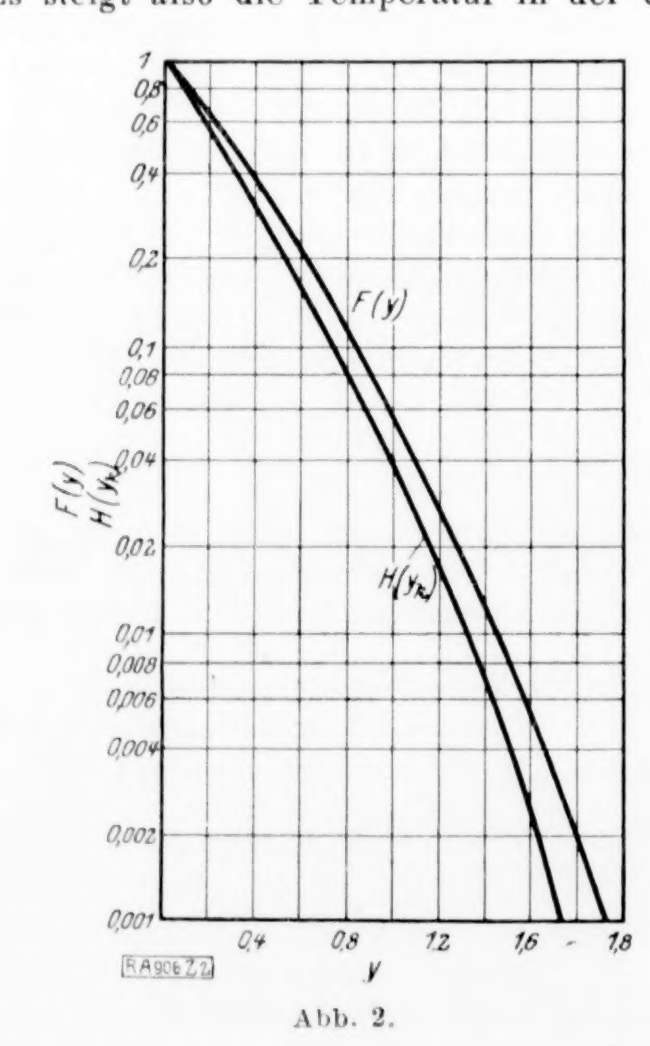


Abb. 2.

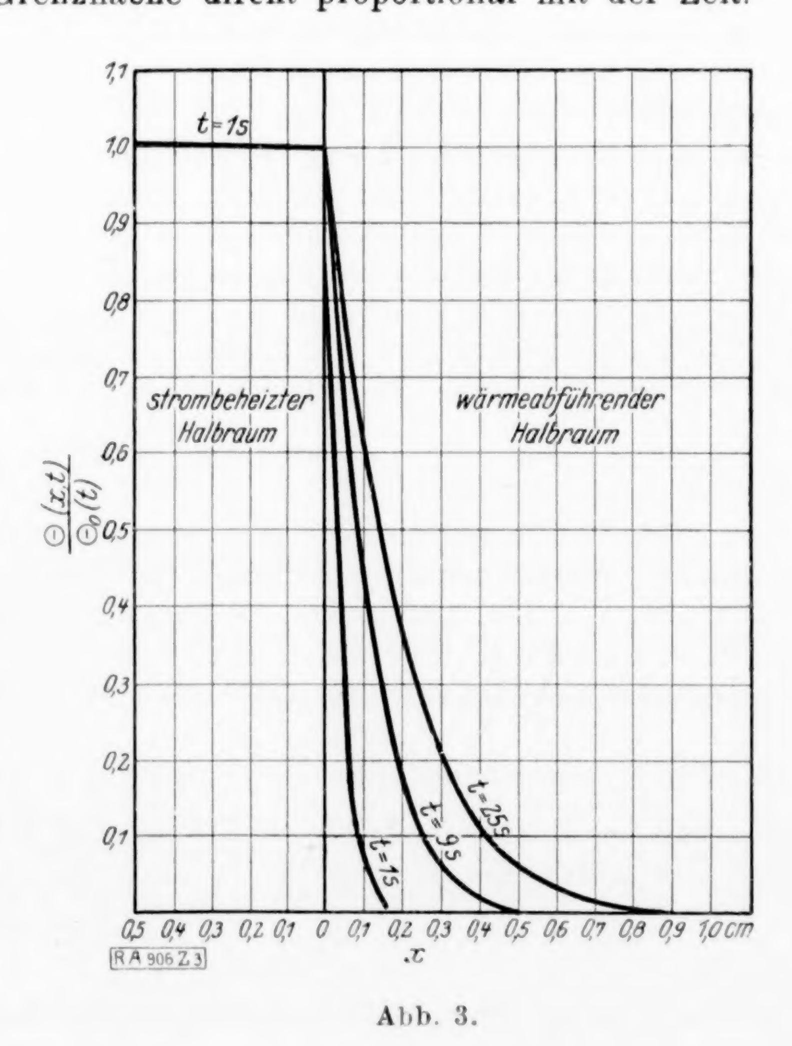


Abb. 3.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Gl. (15a u. b) tatsächlich die vollständigen Lösungen der vorliegenden Aufgabe sind. Es ist danach für die örtliche und zeitliche Temperaturverteilung im wesentlichen nur der Verlauf der Funktion $F(y)$ maßgebend. In Abb. 2 ist diese Funktion in Abhängigkeit von y bei logarithmischer Ordinatenskala graphisch dargestellt. Die Abb. 3 gibt die mit Hilfe dieses Funktionsbildes entwickelte örtliche Temperaturverteilung im Verhältnis zur Temperatur in der Grenzfläche für drei verschiedene Zeitpunkte wieder. Dabei ist angenommen, daß der beheizte Halbraum aus Kupfer besteht, während der wärmeabführende Halbraum Kabelmasse enthält. Man ersieht aus dem Bild, daß z. B. nach 25 s die Temperatur des wärmeabführenden Halbraumes in 5,2 mm Abstand von der Grenzfläche erst 5 vH der zu dieser Zeit in der Grenzfläche selbst herrschenden Temperatur beträgt.

In dasselbe Bild ist auch noch die Temperaturverteilung im strombeheizten Halbraum nach Ablauf von 1 s eingetragen. Im Gegensatz zu der Kurve des Temperaturgefälles im wärmeabführenden Halbraum mit nach oben offener Wölbung hat diese Kurve für den Kupferleiter eine schwache, nach unten offene Wölbung.

Die vor allem interessierende maximale Temperaturerhöhung innerhalb des Kupferleiters im Vergleich zur Temperatur in der Grenzfläche läßt sich unmittelbar aus Gl. (15b) entnehmen. Nach Abb. 2 ist nämlich schon für ein $|y_k| \approx 1,5$ $F(y_k)$ mit 0,01 gegen den Wert 1 in der eckigen Klammer von (15b) sehr klein. Für $|y_k| \geqq 1,5$ ist also angenähert $\Theta_k = \Theta_0(t) \cdot (A_i \lambda_k + A_k \lambda_i) : A_i \lambda_k$. Für Materialien wie Kupfer und Kabelmasse[1]) wird der rechtsstehende Ausdruck ohne $\Theta_0(t)$ rund gleich 1,01. Die Temperatur des Kupfers ist also an allen Stellen des Innern höchstens um 1 vH größer als die Temperatur in der Grenzfläche.

Die Gl. (16) für den Temperaturanstieg in der Grenzfläche zeigt das auffällige Ergebnis, daß die Temperatur dort linear ansteigt, also nach demselben Gesetz wie die Temperatur eines Leiters, der gar keine Wärmeabfuhr besitzt. Dies hat seinen Grund in der besonderen Gestalt des stromführenden Leiters. Wäre er nämlich in der Querschnittsdimension senkrecht zur Grenzfläche nur von endlicher Dicke, so wären an dem Wärmestrom, der zu den verschiedenen Zeiten an der Oberfläche des Leiters anlangt, immer nur dieselben Schichten beteiligt. Da er aber unendlich dick angenommen wurde, so nehmen an dieser Wärmelieferung außer allen früheren immer wieder neue, noch tiefer liegende Schichten teil.

Dieser Einfluß wird noch deutlicher, wenn man rechnerisch den Anteil feststellt, den die weiter im Innern gelegenen Schichten an dem Wärmestrom haben, der in den zu erwärmenden Halbraum eintritt. Dazu hat man nur nötig, den gesamten Wärmestrom Q_x, der bis zu einer gewissen Zeit t durch eine im beheizten Halbraum liegende Schicht im Abstande x von der Grenzfläche geflossen ist, in Beziehung zu setzen zu dem Wärmestrom Q_0, der innerhalb derselben Zeit durch die Grenzfläche selbst hindurchgetreten ist. Man findet für dieses Verhältnis $Q_x : Q_0$ die Beziehung

$$\frac{Q_x}{Q_0} = H(|y_k|) = (1 + 2\,y_k^2) \cdot e^{-y_k^2} - \frac{3}{2}\sqrt{\pi} \cdot |y_k| \cdot [1 - \Phi(|y_k|)] \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\,y_k^2\right) \quad (17),$$

worin speziell Q_0 gegeben ist durch

$$Q_0 = \varrho\, i^2 \cdot \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot A_k\, t^{3/2} \cdot \frac{A_k \lambda_i}{A_k \lambda_i + A_i \lambda_k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17\,\text{a}).$$

Der Verlauf von $Q_x : Q_0 = H(|y_k|)$ ist in Abb. 2 graphisch dargestellt. Soll z. B. der Wärmestrom Q_x nicht mehr als 5 vH des durch die Grenzfläche hindurchtretenden Wärmeflusses Q_0 betragen, so darf $|y_k|$ nicht kleiner sein als 0,9. Dies bedeutet wegen $A_k \approx 1$, daß $x \geqq 1,8\sqrt{t}$ cm sein muß. Im allgemeinen wäre es also nur für sehr kurze Erwärmungszeiten zulässig, das Problem der Erwärmung eines stromdurchflossenen Leiters bei Wärmeabfuhr in einen festen Körper hinein auf die in diesem Abschnitt angedeutete Weise zu behandeln.

b) **Die Erwärmung eines dünnen, mit konstanter Stromdichte beheizten, ebenen Blechs bei Wärmeabfuhr in die auf beiden Seiten angrenzenden festen Halbräume.** Der von der Stromdichte i durchflossene Leiter soll

[1]) Für Kupfer ist $\lambda = 3,6$ W/cm °C, $A^2 = 1,05$, für Kabelmasse $\lambda = 1,9 \cdot 10^{-3}$ W/cm °C, $A^2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ cm² s⁻¹. Eine ziemlich ausführliche Tabelle der λ- und c-Werte für andere Stoffe in den hier benutzten Einheiten findet man bei Kesselring, Elektr. Schaltgeräte, Samml. Göschen, Bd. 711.

zunächst als ein dünnes, im übrigen sehr langes und hohes Blech gedacht werden, das mit seinen beiden Ebenen an zwei Halbräume mit endlicher Wärmeleitfähigkeit angrenzt.

Bei einem genügend schmalen Blech wird man in guter Annäherung von dem Temperaturgefälle im Innern dieses Bleches absehen können. Da das Blech in festen Körpern eingebettet liegen soll, so stimmt nach (3b) die Blechtemperatur mit den Temperaturen in den Grenzebenen der beiden Halbräume überein. Dagegen wird die andere der beiden Bedingungen an den Trennflächen fester Körper, die Gl. (3a), wenigstens in der äußeren Gestalt dieser Gleichung preisgegeben werden müssen, denn ein im Blech verschwindendes Temperaturgefälle würde dazu führen, auch im wärmeabführenden Halbraum ein verschwindendes Temperaturgefälle anzunehmen.

Es kommt also darauf an, die Gl. (3a) durch eine andere Gleichung zu ersetzen, die physikalisch dasselbe ausdrückt. Es wird an Stelle der Gl. (3a) die Bedingung treten können, daß die auf jeder Seite des Bleches austretende Wärmestromdichte q gleich der an der Grenzfläche in den Halbraum eintretenden Wärmestromdichte ist, die nach wie vor durch $-\lambda_i \cdot \frac{\partial \Theta_i}{\partial x}$ angegeben wird.

Die Wärmestromdichte q wird natürlich ebenso wie die Blechtemperatur $\Theta_0(t)$ eine Funktion von t sein, und sowohl $q(t)$ als auch $\Theta_0(t)$ sind dann vorläufig unbekannte Funktionen. Wegen des Energieprinzips stehen sie aber in der Beziehung zueinander:

$$\frac{d\,\Theta_0(t)}{d\,t} = \frac{\varrho\, i^2}{c_k} - \frac{2}{d \cdot c_k} \cdot q(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18).$$

Dabei ist angenommen, daß beide Seiten des Bleches in gleicher Weise an der Wärmeableitung teilnehmen.

Eine zweite Beziehung zwischen $\Theta_0(t)$ und $q(t)$ kann durch folgende Ueberlegung gefunden werden. Es soll von diesen beiden Funktionen vorläufig willkürlich $\Theta_0(t)$ als bekannt angenommen werden. Ist es dann möglich, für einen unendlichen Halbraum die zeitliche und örtliche Temperaturverteilung $\Theta_i(x, t)$ in seinem Innern für den Fall anzugeben, daß unter gleichzeitigem Bestehen der linearen Wärmeleitungsgleichung für Θ_i anfangs zur Zeit $t = 0$ überall Θ_i gleich Null ist, später für $t > 0$ Θ_i aber nur der einen Bedingung unterworfen ist, daß es am Rande des Halbraumes immer gleich der willkürlichen Funktion $\Theta_0(t)$ ist, so wird man aus der so gefundenen Temperaturverteilung, die unter irgendwelchen Verknüpfungen $\Theta_0(t)$ enthält, auch den Wert für $-\lambda_i \cdot \partial\, \Theta_i / \partial\, x$ am Rande des Halbraumes bestimmen können. Da dieser Wert aber gleich $q(t)$ ist, so hat man damit die gesuchte zweite Beziehung zwischen $q(t)$ und $\Theta_0(t)$.

Mit demselben Recht würde man auch von $q(t)$ ausgehen können. Für die Zulässigkeit der ganzen Ueberlegung ist es sehr wichtig, daß man auch in diesem Falle im Verein mit (18) schließlich zu den gleichen Ausdrücken für $q(t)$ und $\Theta_0(t)$ wie vorher kommt. Diese Uebereinstimmung ist jedenfalls physikalisch unbedingt zu fordern. Daß sie auch mathematisch bei der angegebenen Art der Zerlegung der Aufgabe von vornherein vorhanden ist, scheint auf den ersten Blick nicht so selbstverständlich. Im vorliegenden Falle, wo die Behandlung der Aufgabe für beide Zerlegungsarten möglich ist, kann man sich jedoch davon überzeugen, daß man in beiden Fällen zu dem gleichen Ergebnis kommt. Es soll daher im folgenden von vornherein nur der Fall, bei dem von $\Theta_0(t)$ ausgegangen wird, in Betracht gezogen werden.

Es zerfällt dann die ganze Aufgabe in die zwei Teilprobleme:

1. Es ist die örtliche und zeitliche Temperaturverteilung $\Theta(x, t)$ in einem einseitig begrenzten Halbraum zu bestimmen, für den anfangs zur Zeit $t = 0$ überall $\Theta(x, 0) = 0$ ist, dessen Temperatur in der Grenzebene $x = 0$ sich aber vom Zeitpunkt $t = 0$ nach einem willkürlichen Zeitgesetz $\Theta_0(t)$ verändert.
2. Nach welchem Gesetz steigt die Blechtemperatur $\Theta_0(t)$ an, wenn $\Theta_0(t)$ und der aus dem Blech austretende Wärmefluß $q(t)$ nach (18) miteinander verknüpft sind und für $q(t)$ der aus 1. ermittelte Ausdruck verwendet wird?

1. Die Fragestellung dieses Problems kann zunächst noch weiter vereinfacht werden, indem man vorschreibt, daß die Temperatur in der Grenzebene vom Zeitpunkt

$t = 0$ an den zeitlich unveränderlichen Wert u hat. Für diesen einfacheren Fall läßt sich die Lösung sofort anschreiben. Sie lautet [1])

$$\vartheta_u = u \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2 A_i \sqrt{t}}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und erfüllt tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

Der Uebergang von dieser Lösung für die vereinfachte Aufgabe zu der Lösung der ursprünglichen Aufgabe 1 mit zeitlich veränderlicher Randbedingung läßt sich durch den folgenden allgemeinen Satz [2]) bewerkstelligen.

Es sei $\vartheta(x\,y\,z; t - t', t')$ die Lösung des folgenden Wärmeleitungsproblems: Es gilt für alle Zeiten im Innern eines Körpers: $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = A^2 \cdot \Delta \vartheta$. Für $t = t'$ ist überall im Innern $\vartheta = 0$, für $t > t'$ an den Grenzen des Körpers $\vartheta = u(t') =$ konst. in bezug auf t.

$u(t')$ soll dabei die elementare Aenderung der Temperatur an der Grenzoberfläche bedeuten, die im Zeitpunkt $t = t'$ während des Zeitelementes $d\,t'$ auftritt und dann für spätere Zeiten $t > t'$ in dieser Größe unverändert bestehen bleibt. Durch die Schreibweise $\vartheta(x\,y\,z; t - t', t')$ der Lösung soll mittels der Variablen t' hinter $t - t'$ angedeutet werden, daß diese Lösung eben nur für diejenige Temperaturverteilung zur Zeit $t - t'$ gilt, die von der elementaren Aenderung an der Oberfläche zur Zeit t' herrührt.

Sind dann in einem allgemeineren Falle die Aenderungen in der Temperatur der Oberfläche während des Zeitraumes 0 bis t zeitlich veränderlich und durch

$$\Theta_0(t) = \int_0^t u(t') \cdot d\,t'$$

gegeben mit der speziellen Festsetzung, daß $u(0) = 0$ ist, so besagt der erwähnte allgemeine Satz, daß sich dann die Temperaturverteilung zur Zeit t darstellen läßt durch

$$\Theta(x\,y\,z; t) = \int_0^t \vartheta(x\,y\,z; t - t', t') \cdot d\,t' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Im vorliegenden Falle ist demnach

$$\vartheta(x\,y\,z; t - t', t') = u(t') \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2 A_i \sqrt{t - t'}}\right)\right] = u(t') \cdot \chi(x, t - t')$$

zu setzen mit $u(t') = d\,\Theta_0(t') : d\,t'$. Geht man mit diesem Ausdruck in (20) ein und integriert partiell, so wird mit Rücksicht auf $\Theta_0(0) = 0$ und unter Benutzung des Ausdrucks für $\chi(x, t - t')$

$$\Theta(t, x) = \frac{x}{2 A_i \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \Theta_0(\alpha) \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4 A_i^2 (t - \alpha)}}}{(t - \alpha)^{3/2}} \cdot d\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Damit ist die allgemeine Lösung für das Problem 1 mit der zeitlich veränderlichen Grenzbedingung $\Theta_0(t)$ gewonnen. In der Tat erfüllt die Gl. (21) alle Bedingungen, die an sie zu stellen sind. Insbesondere wird in (21) für $x = 0$ $\Theta(0, t) = \Theta_0(t)$, wie man erkennt, wenn man die neue Integrationsvariable $\beta = x : 2 A_i \sqrt{t - \alpha}$ einsetzt.

Mit Hilfe der Gl. (21) für die zeitliche und örtliche Temperaturverteilung ist es jetzt ohne weiteres möglich, auch überall die Wärmestromdichte im Innern des Halbraumes zu ermitteln. Man findet für sie durch Differentiation nach x und darauf folgender partieller Integration wegen $\Theta_0(0) = 0$ speziell für $x = 0$

$$-\lambda_i \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{\lambda_i}{A_i \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \frac{\Theta_0'(\alpha)}{\sqrt{t - \alpha}} \cdot d\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Diese Wärmestromdichte für $x = 0$ ist aber gerade das gesuchte $q(t)$ der Gl. (18) für die in 1. vorliegende Problemstellung. Setzt man daher (22) statt $q(t)$ in (18) ein, so folgt als Bestimmungsgleichung für $\Theta_0'(t)$

---

[1]) Siehe Riemann-Weber, Bd. II, S. 104 ff.

[2]) Ueber den Beweis dieses Satzes, der noch allgemeiner formuliert werden kann, siehe vor allem bei Boussinesq a. a. O., Bd. I, S. 201 ff. Sonst auch bei Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. II, S. 311 ff. Ohne Beweis ist der Satz in der Math. Enzyklopädie, Physik, Bd. I, S. 176, angegeben.

$$\Theta_0'(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k} - \frac{2\,\lambda_i}{\sqrt{\pi}\cdot A_i\, c_k\, d}\cdot\int_0^t \frac{\Theta_0'(\alpha)}{\sqrt{t-\alpha}}\cdot d\,\alpha \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (23).$$

2. Es handelt sich demnach nur noch um die Lösung der Gl. (23). Wird in dieser Gleichung zur Abkürzung

$$\delta = \frac{2\,\lambda_i}{A_i\, d\, c_k} \qquad \text{und} \qquad \Theta_0'(t) = \psi(t)$$

gesetzt, so läßt sich (23) in der Form schreiben

$$\psi(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k} - \frac{\delta}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^t \frac{\psi(\alpha)}{\sqrt{t-\alpha}}\cdot d\,\alpha \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (23\,a).$$

Dies ist eine lineare Volterrasche Integralgleichung zweiter Art. Sie ist dadurch besonders einfach, daß das inhomogene Glied konstant ist. Ihr Kern $(t-\alpha)^{-1/2}$ wird allerdings für $\alpha = t$ unendlich, aber da er von geringerer Ordnung als 1 unendlich wird, so ist es nach der Bezeichnungsweise der Theorie der Integralgleichungen ein brauchbar unstetiger Kern.

Die Lösung von (23a) läßt sich sehr leicht durch die unendliche Reihe angeben[1])

$$\psi(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k}\cdot\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\left(\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}\right)^p\cdot\psi_p(t) \qquad \text{mit} \qquad \psi_p(t) = \int_0^t \frac{\psi_{p-1}(\alpha)}{\sqrt{t-\alpha}}\, d\,\alpha \quad . \quad (24).$$

Man findet nach einigen leichten Zwischenrechnungen

$$\text{für gerade } p \qquad \psi_{2p}(t) = \frac{(\pi\, t)^p}{\Pi(p)}$$

$$\text{für ungerade } p \qquad \psi_{2p+1}(t) = \frac{(\pi\, t)^{p+1/2}}{\Pi(p+1/2)} \qquad (p \geqq 0)$$

$\Pi(p)$ bedeutet hierin die bekannte Gaußsche Π-Funktion mit $\Pi(p) = p!$ Geht man mit den Ausdrücken für $\psi_p(t)$ in die Gl. (24) ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Reihe (25)[2])

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\delta^2\, t)^{p+1/2}}{\Pi(p+1/2)} = e^{\delta^2 t}\cdot\Phi(\delta\sqrt{t}) \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (25)$$

und der bekannten Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion die Lösung von (23) in der Form

$$\psi(t) = \Theta_0'(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k}\cdot e^{\delta^2 t}\cdot[1-\Phi(\delta\sqrt{t})] \quad . \;.\;.\;.\;.\;. \quad (26).$$

Wegen (18) wird das Zeitgesetz für den aus dem strombeheizten Blech nach einer Seite austretenden Wärmestrom

$$q(t) = {}^1/_2\,\varrho\, i^2\, d\cdot\{1 - e^{\delta^2 t}\cdot[1-\Phi(\delta\sqrt{t})]\} \equiv {}^1/_2\,\varrho\, i^2\cdot d\cdot f(\delta\sqrt{t}) \quad . \;. \quad (27).$$

Durch Integration von (26) nach der Zeit findet man schließlich auch noch den zeitlichen Verlauf der Temperatur des Bleches:

$$\Theta_0(t) = \frac{i^2\varrho}{c_k}\cdot\frac{1}{\delta^2}\cdot\{e^{\delta^2 t}\cdot[1-\Phi(\delta\sqrt{t})] - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\delta\sqrt{t}\} \equiv \frac{i^2\varrho}{c_k}\cdot\frac{1}{\delta^2}\cdot g(\delta\sqrt{t}) \quad (28).$$

Ist $\delta\sqrt{t} \ll 1$, so gehen (27) und (28) über in die Form

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\varrho\, i^2\cdot d\cdot\delta\sqrt{\frac{t}{\pi}}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\delta\sqrt{t}\right) \quad . \;.\;.\;. \quad (27\,a)$$

$$\Theta_0(t) = \frac{i^2\varrho}{c_k}\cdot t\cdot\left[1 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\cdot\delta\sqrt{t} + \frac{1}{2}\,\delta^2 t\right] \quad . \;.\;.\;.\;. \quad (28\,a).$$

Ist $\delta\sqrt{t} \gg 1$, so schreiben sich (27) und (28) wie folgt:

$$q(t) = \frac{1}{2}\,\varrho\, i^2\cdot d\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\delta\sqrt{t}}\right) \approx \frac{1}{2}\,\varrho\, i^2\cdot d \quad . \;.\;.\;. \quad (27\,b),$$

$$\Theta_0(t) = \frac{i^2\varrho}{c_k}\cdot\frac{1}{\delta^2}\cdot\left(\frac{2\,\delta\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - 1\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{i^2\varrho}{\delta\, c_k}\cdot\sqrt{t} \quad . \;.\;.\;. \quad (28\,b).$$

[1]) Vergl. V. Volterra, Leçons sur les équations intégrales etc. Paris 1913. S. 83.

[2]) Siehe N. Nielsen, Theorie des Integrallogarithmus, Leipzig 1906, S. 10.

Die Funktionen $f(\delta \sqrt{t})$ und $g(\delta \sqrt{t})$, die nach (27) für den zeitlichen Verlauf der Wärmestromdichte und der Blechtemperatur maßgebend sind, sind in Abb. 4 in Abhängigkeit von $\delta \sqrt{t} = x$ graphisch dargestellt.

Vergleicht man die Gl. (28a) für $\Theta_0(t)$ mit der entsprechenden Gl. (16) in dem unter a) behandelten Beispiel, so stimmen die Glieder erster Ordnung überein, sobald in (16) $A_k \lambda_i$ gegen $A_i \lambda_k$ als klein betrachtet werden darf. Das trifft aber angenähert zu, wenn es sich beispielsweise um Kupfer und Kabelmasse handelt. Auch bei dem blechförmigen Leiter steigt also anfangs die Temperatur proportional mit der Zeit. Die Größen höherer Ordnung wirken aber dahin, daß sehr bald eine Abweichung von dem rein linearen Gesetz eintritt, und zwar in dem Sinne eines langsameren Anstieges. Für sehr große Zeiten stiege die Temperatur nur noch proportional mit der Quadratwurzel aus der Zeit an. Sie wüchse also danach unbegrenzt. Diese Ungereimtheit hat ihren Grund darin, daß im vorliegenden Fall ein wärmeabführender fester Körper mit unendlich großen Dimensionen angenommen wurde.

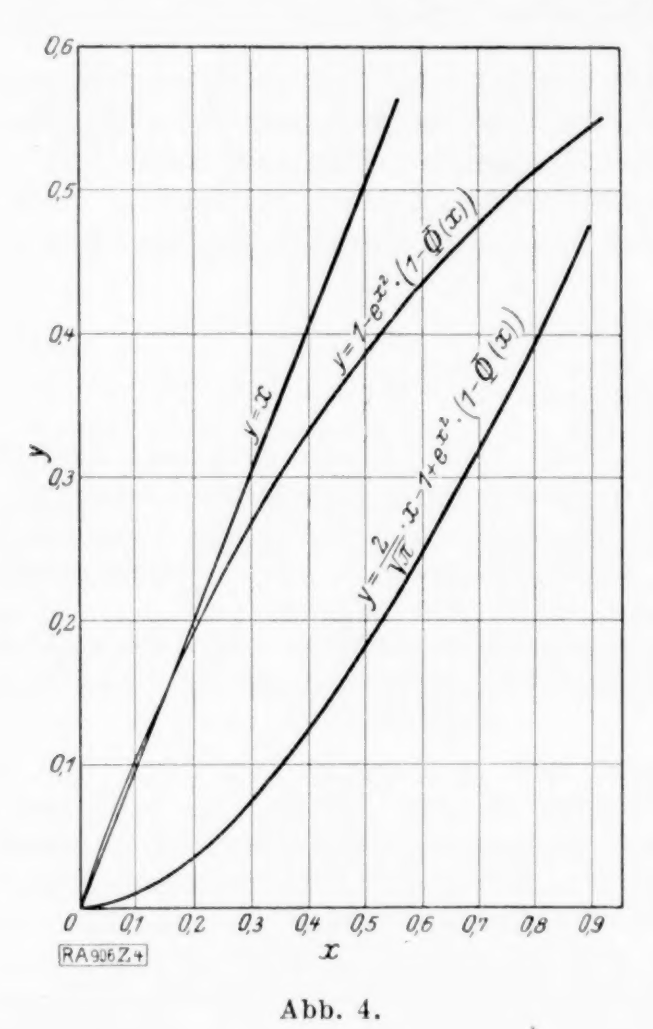


Abb. 4.

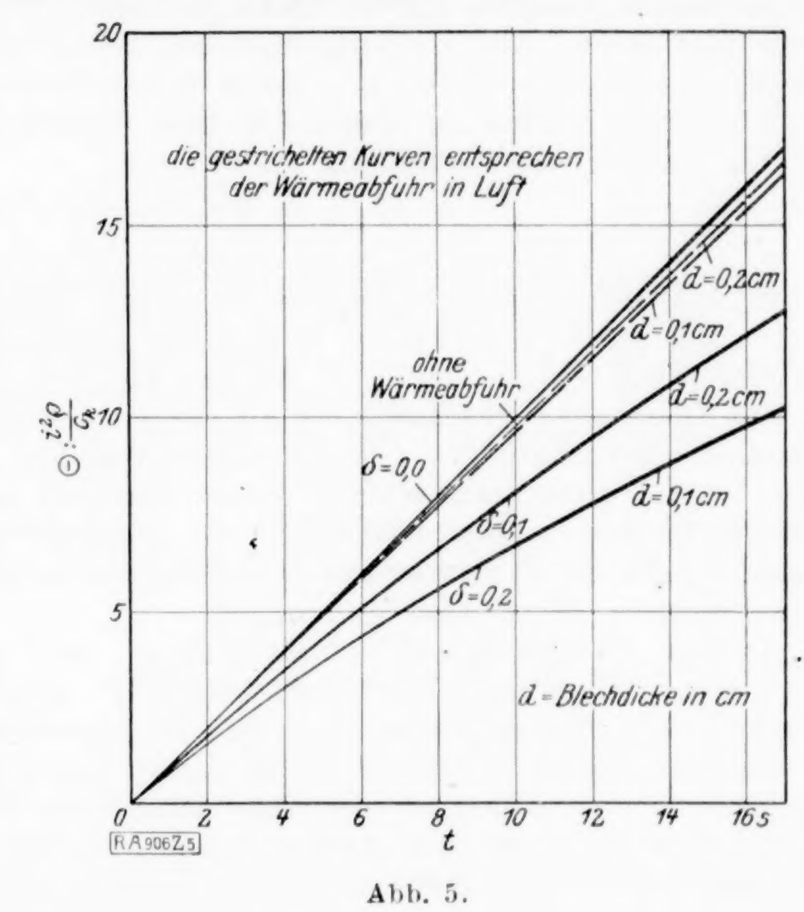


Abb. 5.

In Abb. 5 ist die Blechtemperatur $\Theta_0(t)$ im Verhältnis zu $\varrho i^2/c_k$ in Abhängigkeit der Erwärmungszeit t in s für verschiedene dünne Bleche aufgetragen. Dabei ist als Material für die Bleche Kupfer, als Material für die wärmeabführenden Halbräume Kabelmasse angenommen. Da die Stromdichte und nicht der Gesamtstrom für eine bestimmte Blechhöhe als konstant vorausgesetzt ist, so fällt naturgemäß für dickere Bleche die Erwärmung stärker aus als für dünnere, und es nähert sich für dicke Bleche die Erwärmungskurve mehr der durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie, die dem Temperaturanstieg ohne Wärmeabfuhr entspricht. Dies deckt sich mit dem früheren Ergebnis bei dem unter a) behandelten Beispiel. Die in Abb. 5 unterhalb der geraden Linie eingezeichneten, gestrichelten Kurven geben in dem gleichen Maßstab wie dem der anderen Kurven den Temperaturanstieg wieder, wenn die Bleche durch die Luft gekühlt werden. Für die Wärmeübergangszahl ist dabei der Wert von 1 mW/cm^2 ^{0}C angenommen, der unter diesen Verhältnissen in ruhender Luft gilt. Das Bild 5 läßt erkennen, daß für kurze Erwärmungszeiten die Wärmeabfuhr in feste Wärmeleiter hinein tatsächlich günstiger wirkt als die Wärmeabfuhr bei Kühlung durch Gase oder Flüssigkeiten.

Abgesehen vom zeitlichen Verlauf der Blechtemperatur wäre noch von Interesse, das Vordringen der Temperatur in die wärmeabführenden Halbräume näher zu untersuchen. Die Unterlagen dazu sind jedenfalls durch die vorstehenden Rechnungen vollständig gegeben. Im vorliegenden Falle soll jedoch davon Abstand genommen werden,

diese Untersuchung wirklich durchzuführen, denn sie würde für die Ausbreitung der Temperatur in den beiden wärmeabführenden Halbräumen kein wesentlich anderes Bild ergeben, als dafür in Abb. 3 gefunden wurde.

Es bleibt aber noch die Frage offen, in welchem Sinne sich die bisherigen Ergebnisse der Rechnung ändern, wenn es sich um ein Blech handelt, das zwar immer noch als sehr lang angesehen werden darf, aber nur eine begrenzte Höhe hat. Ist die Höhe des Bleches nicht gar zu niedrig, so wird der Einfluß der Blechenden eines Querschnitts auf die Erwärmung nur geringfügig sein. Das gilt in besonders hohem Maße, wenn nur kurzzeitige Erwärmungen betrachtet werden, bei denen der Wärmestrom nur in geringe Tiefen vordringt. Es wird dann mit dieser Einschränkung einen nur geringfügigen Fehler bedeuten, wenn man die Erwärmung eines schmalen Blechstreifens endlicher Höhe, der vollständig in einem festen Wärmeleiter eingebettet ist, so betrachtet, als ob die Wärmeabfuhr nur in die auf beiden Seiten senkrecht vor dem Blechstreifen liegenden Teile des Wärmeleiters bei überall gleicher Temperatur des Bleches im Querschnitt erfolgt.

2. Der kreisförmig begrenzte Leiter. Die Erwärmung eines stromdurchflossenen zylindrischen Leiters, der in einem festen Wärmeleiter liegt, möge unter ganz ähnlichen, vereinfachenden Voraussetzungen bestimmt werden. Dementsprechend soll auch jetzt von einem Temperaturgefälle im Innern des stromdurchflossenen Leiters abgesehen werden. Es muß dann wieder an Stelle der Grenzbedingung (3a) die folgende, mit dem Energieprinzip verträgliche Beziehung treten:

$$\frac{d\,\Theta_0(t)}{d\,t} = \frac{\varrho\, i^2}{c_k} - \frac{2 \cdot q(t)}{a \cdot c_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

worin $q(t)$ die Wärmestromdichte in W/cm^2 bedeutet.

Um noch eine zweite Beziehung zwischen $\Theta_0(t)$ und $q(t)$ zu erhalten, muß wie vordem angestrebt werden, z. B. für den willkürlich angenommenen Temperaturverlauf $\Theta_0(t)$ an der Oberfläche des stromdurchflossenen Leiters die zeitliche und örtliche Temperaturverteilung innerhalb des den Leiter umgebenden, wärmeabführenden Körpers festzustellen. Man könnte auch jetzt wieder daran denken, statt $\Theta_0(t)$ den Wärmestrom $q(t)$ an der Oberfläche des Leiters willkürlich als gegeben anzunehmen. Jedoch bietet es im vorliegenden Falle in mathematischer Hinsicht bedeutende Vorteile, gerade von dem Temperaturverlauf $\Theta_0(t)$ auszugehen.

Der die Wärme ableitende Körper, den man sich in Analogie zu dem eben behandelten Fall zunächst wieder unendlich ausgedehnt denken könnte, ist jetzt seiner Gestalt nach der Außenraum eines langgestreckten Zylinders, oder, auf den einzelnen Querschnitt bezogen, das Aeußere eines Kreises. In Rücksicht auf die mathematische Behandlung der Aufgabe soll aber stattdessen die Wärmeausbreitung in einen Kreisring hinein betrachtet werden, dessen äußerer Radius b in einem festen, aber willkürlich gewählten Verhältnis zum inneren Radius a steht. Außerdem werde noch die für die Rechnung einfachere Annahme gemacht, daß die äußere Oberfläche des Wärmeleiters selbst wärmeundurchlässig ist. Nach den früheren Ausführungen kann diese Annahme unbedenklich gemacht werden, wenn nur der kurzzeitige Erwärmungsvorgang untersucht werden soll. Die Ergebnisse der Rechnung im Hinblick auf die Erwärmung des stromdurchflossenen Leiters werden dann nur solange eine brauchbare Annäherung an den wirklichen Temperaturanstieg dieses Leiters bei wärmedurchlässiger Oberfläche des angrenzenden Körpers sein, wie die Temperatur in der äußeren Grenzoberfläche noch nicht nennenswert über die Temperatur der Umgebung gestiegen ist. Da nach dem früheren Beispiel tatsächlich die Temperatur nur sehr langsam und mit einem sehr starken Gefälle in den Wärmeleiter eindringt, so steht zu erwarten, daß selbst dann, wenn der Radius der äußeren Oberfläche nur das 2- bis 2,5-fache des Innenradius beträgt, innerhalb der hier interessierenden Zeiten die eben erwähnte Voraussetzung noch als erfüllt angesehen werden kann. Selbstverständlich wird hinterher zu prüfen sein, ob diese Vermutung auch tatsächlich zutrifft.

Das ganze Problem läßt sich danach in den folgenden drei Schritten behandeln:

1. Gegeben ist ein Kreisringgebiet mit dem Innenradius a und dem Außenradius b. Für die Temperatur innerhalb dieses Gebietes gilt zu jeder Zeit die Wärmeleitungsgleichung ohne Quellenglied. Zu Anfang für $t = 0$ sei die Temperatur überall Null. Es werde dann von $t = 0$ an die innere Zylinderfläche ständig auf der konstanten Temperatur $u > 0$ gehalten, während an der äußeren Zylinderoberfläche kein Wärmestrom hindurchtreten

kann. Es ist unter diesen Bedingungen die zeitliche und örtliche Temperaturverteilung $\vartheta(r, t)$ im Innern des Zylinderringes zu bestimmen.

2. Es ist der Ausdruck für diese Temperaturverteilung zu ermitteln, wenn die Bedingungen dieselben sind wie unter 1) mit der einzigen anderen Annahme, daß die Temperatur für $r = a$ nach einem willkürlichen Zeitgesetz $\Theta_0(t)$ verläuft.

3. Mit Hilfe von (29) und mit Hilfe des nach 2) gewonnenen Ausdrucks für die Wärmestromdichte an der inneren Oberfläche in Funktion von $\Theta_0(t)$ ist der bis dahin noch unbekannte Temperaturverlauf $\Theta_0(t)$ zu finden.

1. Das erste Teilproblem lautet in mathematischer Formulierung: Es ist eine Funktion ϑ zu finden, die der Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = A_i^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

genügt und die folgenden Nebenbedingungen erfüllt: Für $t = 0$ und $a < r \leqq b$ ist $\vartheta = 0$; für $r = a$ und $t \geqq 0$ ist $\vartheta = u = \text{konst.}$; für $r = b$ und $t > 0$ ist $\partial\vartheta/\partial r = 0$.

Die Bestimmung der Funktion ϑ, die unter den angegebenen Grenzbedingungen die Gl. (30) erfüllt, gelingt ohne besondere Schwierigkeiten. Sind β_ν mit $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ die unendlich vielen Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$N_1(\beta_\nu b) \cdot J_0(\beta_\nu a) - J_1(\beta_\nu b) \cdot N_0(\beta_\nu a) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

so erfüllt die unendliche Reihe (32)

$$\vartheta = u + \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \cdot [N_1(\beta_\nu b)\, J_0(\beta_\nu r) - N_0(\beta_\nu r)\, J_1(\beta_\nu b)] \cdot e^{-\beta_\nu^2 A_i^2 t} \quad . \; . \quad (32),$$

sowohl die Gl. (30) als auch die Randbedingungen für $r = a$ und $r = b$. Dabei bedeuten in (32) die $J(\beta_\nu r)$ und $N(\beta_\nu r)$ die Zylinderfunktionen der ersten und zweiten Art in der gleichen Definition, wie sie die Funktionentafeln von Jahnke-Emde bringen. Die Konstanten C_ν in (32) lassen sich aus der Bedingung bestimmen, daß für $t = 0$ $\vartheta = 0$ sein muß für alle $a < r \leqq b$. Multipliziert man Gl. (32) für $t = 0$ beiderseits mit

$$r \cdot [J_0(\beta_p r)\, N_0(\beta_p a) - J_0(\beta_p a) \cdot N_0(\beta_p r)] \quad \text{für} \quad p = 0, 1, 2 \ldots$$

und integriert auf beiden Seiten über r von $r = a$ bis $r = b$, so verschwinden für $p \neq \nu$ alle rechtsstehenden Integrale und nur der Fall $p = \nu$ liefert ein von Null verschiedenes Integral. Mit den Abkürzungen

$$a_\nu = \beta_\nu a, \quad r_\nu = \beta_\nu r, \quad b_\nu = \beta_\nu b, \quad \frac{J_0(a_\nu)}{J_1(a_\nu)} = \frac{N_0(a_\nu)}{N_1(b_\nu)} = \varkappa_\nu, \quad h_\nu = \frac{1}{\varkappa_\nu^2 - 1}, \quad \beta_\nu^2 A_i^2 = \gamma_\nu^2 \quad (33)$$

erhält man schließlich die Lösung in der Form

$$\vartheta = u \cdot \left[1 + \pi \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \varkappa_\nu h_\nu \cdot (N_1(b_\nu)\, J_0(r_\nu) - J_1(b_\nu) \cdot N_0(r_\nu)) \cdot e^{-\gamma_\nu^2 t}\right] \quad . \; . \quad (34).$$

Aus der unendlichen Summe von (34) kann mann ein normiertes Orthogonalsystem herausziehen. Für die Funktionen

$$\varphi_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \pi \beta_\nu \varkappa_\nu \cdot \sqrt{h_\nu r} \cdot [J_1(b_\nu)\, N_0(r_\nu) - N_1(b_\nu)\, J_0(r_\nu)] \quad . \; . \; . \quad (35)$$

gilt nämlich sowohl die sogenannte Normierungsgleichung (35a) als auch die bekannte Orthogonalitätsgleichung (35b)

$$\int_a^b \varphi_\nu^2(r)\, dr = 1, \qquad \int_a^b \varphi_\nu(r)\, \varphi_\mu(r)\, dr = 0 \qquad (\nu \neq \mu) \quad . \; . \quad (35\,\text{a, b}).$$

Mit den Konstanten $c_\nu = \sqrt{2 h_\nu} : \beta_\nu$ besteht dann für $a < r \leqq b$ die Beziehung

$$\sqrt{r} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, \varphi_\nu(r),$$

Für die Quadratsumme der Konstanten c_ν folgt daraus[1]), da das Orthogonalsystem ein vollständiges ist,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2 = 2 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu}{\beta_\nu^2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36).$$

Diese Formel wird später noch von Nutzen sein.

[1]) Siehe z. B. Riemann-Weber-v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der math. Physik, Bd. I, S. 298.

2. Für die Lösung des Teilproblems 2 kann wieder der schon früher benutzte allgemeine Satz herangezogen werden. Nach der früheren Beziehung tritt jetzt für $\vartheta(x\,y\,z;\, t-t',\, t')$ der Ausdruck (34) für ϑ, indem für u $\Theta_0'(t')$ und in den Potenzexponenten für t $t-t'$ gesetzt wird. Man wird so für $\Theta(r,t)$ zu der Gleichung geführt:

$$\Theta(r,t) = \int_0^t \Theta_0'(\alpha) \cdot \Big[1 + \pi \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \varkappa_\nu\, h_\nu \cdot \big(N_1(b_\nu)\, J_0(r_\nu) - J_1(b_\nu)\, N_0(r_\nu)\big) \cdot e^{-\gamma_\nu^2 (t-\alpha)}\Big]\, d\alpha \qquad (37).$$

mit der Festsetzung $\Theta_0(0) = 0$. Daraus folgt sofort weiter für den Wärmefluß an einer beliebigen Stelle

$$-\lambda_i \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \pi \lambda_i \cdot \int_0^t \Theta_0'(\alpha) \cdot \Big[\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \varkappa_\nu h_\nu \big(N_1(b_\nu)\, J_1(r_\nu) - N_1(r_\nu)\, J_1(b_\nu)\big) \cdot e^{-\gamma_\nu^2 (t-\alpha)}\Big]\, d\alpha \qquad (38).$$

Tatsächlich erfüllt die Gl. (37) die Forderung, daß für $r = a$ $\Theta(a,t) = \Theta_0(t)$ ist, und es sind auch alle übrigen an sie zu stellenden Bedingungen erfüllt. Die für die Bildung von (38) nötige Differentiation unter dem Integralzeichen von (37) ist zulässig, da, wie sich nachweisen läßt, das resultierende Integral gleichmäßig konvergiert.

Aus (38) folgt speziell für $r = a$

$$-\lambda_i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{2\lambda_i}{a} \cdot \int_0^t \Theta_0'(\alpha) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu\, e^{-\gamma_\nu^2 (t-\alpha)}\, d\alpha\,.$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als das $q(t)$ der Gl. (29). Setzt man also noch zur Abkürzung $\Theta_0'(\alpha) = \psi(\alpha)$ und $\sigma = 4\lambda_i : a^2 c_k$, so erhält man für $\psi(t)$ schließlich die folgende Bestimmungsgleichung

$$\psi(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k} - \sigma \cdot \int_0^t \psi(\alpha) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu\, e^{-\gamma_\nu^2 (t-\alpha)}\, d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Für den Temperaturverlauf an der äußeren Grenzfläche ergibt sich unmittelbar aus (37):

$$\Theta(b,t) = \int_0^t \Theta_0'(\alpha) \cdot \Big[1 - \frac{2}{b} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varkappa_\nu h_\nu}{\beta_\nu} \cdot e^{-\gamma_\nu^2 (t-\alpha)}\Big] \cdot d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

3. Das Teilproblem 3 besteht jetzt nur noch in der Auflösung der Gl. (39) nach der unbekannten Funktion $\psi(\alpha)$. Die Gl. (39) ist entsprechend dem früheren Beispiel eine lineare Volterrasche Integralgleichung zweiter Art. Ihr Kern $k(t,\alpha)$, Gl. (41), ist auch jetzt wieder für $t = \alpha$ unstetig unendlich

$$k(t,\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu\, e^{-\gamma_\nu^2 (t-\alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Für ein genügend großes ν läßt sich nämlich unter Anwendung der asymptotischen Näherungsausdrücke für die Zylinderfunktionen leicht zeigen, daß sich die Wurzeln β_ν für große ν aus der Gl. (42a) berechnen

$$a\,\beta_\nu = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\nu+1}{\varepsilon-1} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = b : a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42\text{a})$$

lassen. Dann wird aber wegen (33)

$$\varkappa_\nu = (-1)^\nu \cdot \varepsilon^{1/2}\,, \qquad \varkappa_\nu^2 = \varepsilon\,, \qquad h_\nu = \frac{1}{\varepsilon-1} \quad (\nu \text{ sehr groß}) \qquad (42\text{b, c, d}).$$

Es wird also $k(t,\alpha)$ für $t = \alpha$ unendlich. Es läßt sich aber die Integralgleichung (39) in eine Integralgleichung mit durchweg stetigem Kern verwandeln, indem man für das unter dem Integralzeichen von (39) stehende $\psi(\alpha)$ den Ausdruck für $\psi(\alpha)$ nach der Gleichung selbst einsetzt. Der neue Kern dieser so umgeformten Integralgleichung ist aber ebenso wie das neu entstandene inhomogene Glied dieser Gleichung durchweg stetig, und es gibt folglich stets eine und nur eine für alle $t > 0$ und alle $\sigma > 0$ stetige Lösung der Gl. (39)[1].

[1] Siehe Goursat, Cours d'Analyse, t. III, S. 325.

Diese Lösung von (39) ist nach der Methode der schrittweisen Näherungen darstellbar in der Form

$$\psi(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k} \cdot \left[1 - \sigma \cdot \int_0^t k(t, \alpha)\, d\alpha + \sigma^2 \cdot \int_0^t k(t, \alpha) \int_0^{\alpha_1} k(\alpha, \alpha_1)\, d\alpha_1 \cdot d\alpha \right. \quad . \quad (43)$$

und nach dem vorhergehenden ist bekannt, daß die in der eckigen Klammer stehende Reihe für alle $t > 0$, $\sigma > 0$ konvergiert. Damit die Reihenentwicklung (43) eine brauchbare Lösung liefert, müssen die in ihr aufeinanderfolgenden Glieder bereits im Anfang ihren absoluten Werten nach abnehmen und kleiner sein als 1. Es ist aber wegen $k(t, \alpha) = |k(t, \alpha)|$ z. B. das dritte Glied

$$\int_0^t k(t, \alpha) \int_0^\alpha k(\alpha, \alpha_1)\, d\alpha_1\, d\alpha \leqq \left(\int_0^t k(t, \alpha)\, d\alpha\right)^2 \equiv B_t^2 .$$

Wenn es daher möglich sein soll, sich in (43) auf die Anfangsglieder zu beschränken, so muß $\sigma B_t < 1$ sein. Nun ist in Rücksicht auf die Gl. (41) und (36)

$$B_t \equiv \int_0^t k(t, \alpha)\, d\alpha = \frac{a^2}{A_i^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{4} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu}{a_\nu^2} \cdot e^{-\gamma_\nu^2 t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Die in (44) rechts stehende Summe läßt sich nicht in geschlossener Form angeben. Da jedes ihrer Glieder positiv ist und um so kleiner, je größer t ist, so wird B_t um so größer, je größer t gewählt wird und je weniger Summenglieder berücksichtigt werden. Als größter Wert von t kann entsprechend den praktisch vorkommenden Kurzschlußzeiten etwa der Wert $t_1 = 25$ s angenommen werden. Werden außerdem in der Summe nur die ersten drei Glieder in Betracht gezogen in der Erwartung, daß nur sie noch nennenswert den Wert der Klammer beeinflussen, so gilt für Zeiten $t \leqq t_1$

$$\sigma B_t < 4\, \frac{c_i}{c_k} \cdot \left[\frac{\varepsilon^2 - 1}{4} - \sum_{\nu=0}^{1,2} \frac{h_\nu}{a_\nu^2} \cdot e^{-\gamma_\nu^2 t_1}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44\,a).$$

Für die zahlenmäßige Bestimmung des absoluten Wertes von σB_t sind in (44a) für die verschiedenen Größen die dafür in praktischen Fällen geltenden numerischen Werte einzusetzen. Vor allen Dingen müssen dazu die Wurzeln der transzendenten Gl. (31) für ein willkürlich gewähltes Verhältnis von $b : a = \varepsilon$ bekannt sein. In der nachstehenden Tabelle sind die ersten fünf Wurzeln von (31) für den Fall $b : a = \varepsilon = 2{,}5$ angegeben. Außerdem sind in der Tabelle noch die zugehörigen Werte von $\varkappa_\nu$, $\varkappa_\nu^2$, h_ν und $h_\nu : a_\nu^2$ aufgenommen.

Tabelle für die ersten fünf Wurzeln der Gleichung
$N_1(2{,}5\, a_\nu) \cdot J_0(a_\nu) = N_0(a_\nu) \cdot J_1(2{,}5\, a_\nu)$

ν	$a_\nu = a \cdot \beta_\nu$	$\varkappa_\nu = \frac{J_0(a_\nu)}{J_1(\varepsilon\, a_\nu)}$	$\varkappa_\nu^2$	$h_\nu = \frac{1}{\varkappa_\nu^2 - 1}$	$\frac{h_\nu}{a_\nu^2}$	$\frac{1}{2}\pi(2\nu + 1)$
0	0,866	+ 1,4643	2,1442	0,8740	1,1653	1,0472
1	3,085	— 1,5634	2,4441	0,6925	0,0728	3,1416
2	5,201	+ 1,5760	2,4840	0,6739	0,0249	5,2360
3	7,306	— 1,5787	2,4923	0,6701	0,0126	7,3304
4	9,405	+ 1,5806	2,4983	0,6674	0,0075	9,4248

Die Wurzelwerte a_ν sind in der Tabelle bis auf die dritte Dezimalstelle genau berechnet, d. h. der wahre Wurzelwert liegt jedenfalls innerhalb des durch $a_\nu \pm 0{,}0005$ gekennzeichneten Bereichs. Aus der zweiten Spalte der Tabelle erkennt man, daß mit wachsendem ν $\varkappa_\nu^2$ tatsächlich, so wie es nach Gl. (57a) sein muß, gegen den Wert $\varepsilon = 2{,}5$ konvergiert. Entsprechend geht h_ν gegen den Wert $^2/_3$. Die letzte Spalte der Tabelle gibt die Lage der Nullstellen von (31) nach der Näherungsformel (42a) wieder.

Legt man den speziellen Fall zugrunde, daß ein Kupferleiter in Kabelmasse liegt, so läßt sich jetzt der numerische Wert von σB_t nach Gl. (44a) berechnen. Hat noch im besonderen der Kupferleiter einen Radius $a = 0{,}5$ cm, so ist für $t_1 = 25$ s oder $t_1 : a^2 = 100$ $\sigma B_t \leqq 0{,}225$. Für größere Radien wird unter sonst gleichen Verhältnissen σB_t kleiner,

für kleinere Radien größer. Solange $t_1 : a^2$ nicht größer als 100 wird, ist jedenfalls die Entwicklung von (43) genügend konvergent, so daß es hinreicht, in ihr nur bis zum zweiten Gliede zu gehen. Der Fehler wird dann nicht größer als 1,5 vH.

Berechnet man das mit σ^2 behaftete Glied in (43) und führt noch die Abkürzungen ein

$$g_1(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu}{a_\nu^2} \cdot (1 - e^{-\gamma_\nu^2 t}) \quad \ldots \ldots \ldots (45\,\text{a}),$$

$$g_2(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{h_\nu \cdot h_\mu}{a_\nu^2 \cdot a_\mu^2} \cdot \left[1 - \frac{a_\nu^2 \cdot e^{-\gamma_\mu^2 t} - a_\mu^2 \cdot e^{-\gamma_\nu^2 t}}{a_\nu^2 - a_\mu^2}\right] \quad \ldots (45\,\text{b}),$$

so schreibt sich die Näherungslösung von (43) mit den schon mehrfach erwähnten Beschränkungen der Gültigkeit in der Form

$$\psi(t) = \Theta_0'(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k} \cdot \left[1 - 4\,\frac{c_i}{c_k} \cdot g_1(t) + 16 \left(\frac{c_i}{c_k}\right)^2 \cdot g_2(t) - \ldots\right] \quad \ldots (46).$$

Aus dieser Gleichung für $\Theta_0'(t)$ folgt sofort mit Hilfe von (29) der Ausdruck für den zeitlichen Verlauf des Wärmestromes $q(t)$. Es wird

$$q(t) = 2\,a \cdot \frac{c_i}{c_k} \cdot \varrho\, i^2 \cdot \left[g_1(t) - 4\,\frac{c_i}{c_k}\, g_2(t) + \ldots\right] \quad \ldots \ldots (47).$$

Der Temperaturanstieg des Kupferleiters selbst ergibt sich aus (46) durch Integration nach der Zeit. Man erhält für den Temperaturverlauf

$$\Theta_0(t) = \frac{\varrho\, i^2}{c_k} \cdot \left[t - 4\,\frac{c_i}{c_k} \cdot h_1(t) + 16 \left(\frac{c_i}{c_k}\right)^2 \cdot h_2(t) - \ldots\right] \quad \ldots \ldots (48).$$

Mit Rücksicht auf die Gl. (45a und b) ist darin

$$h_1(t) = \int_0^t g_1(t)\,dt = \left(\Sigma \frac{h_\nu}{a_\nu^2}\right) \cdot t - \frac{a^2}{A_i^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu}{a_\nu^4} \cdot (1 - e^{-\gamma_\nu^2 t}) \quad \ldots (49\,\text{a}),$$

$$h_2(t) = \int_0^t g_2(t)\,dt = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu}{a_\nu^2}\right)^2 \cdot t - \frac{a^2}{A_i^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{h_\nu\, h_\mu}{a_\nu^4\, a_\mu^4} \cdot \frac{a_\nu^4 (1 - e^{-\gamma_\mu^2 t}) - a_\mu^4 (1 - e^{-\gamma_\nu^2 t})}{a_\nu^2 - a_\mu^2} \quad (49\,\text{b}).$$

Im Falle $\mu = \nu$ vereinfachen sich in den Gl. (45b) und (49b) die Brüche hinter den Doppelsummen. Bei der numerischen Berechnung von $\Theta_0(t)$ wird man sich natürlich bei den in (49a und b) vorkommenden Summen auf die ersten und größten Glieder beschränken müssen. Eine Abschätzung der Größe des dadurch entstehenden Fehlers gelingt, wenn zunächst einmal die Summe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu}{a_\nu^2}$ betrachtet wird. Geht man in ihr nur bis zum fünften Gliede, so ergibt sich nach der Tabelle im Falle $\varepsilon = 2{,}5$ für diese Summe der Wert 1,2832, während nach Gl. (36) der genaue Wert 1,3125 ist. Der Fehler, den man bei Berechnung der Summe durch Berücksichtigung allein der ersten fünf Glieder macht, beträgt also lediglich 2,24 vH des wahren Wertes. Der Fehler bei der Berechnung von $h_1(t)$ mit Hilfe der ersten fünf Glieder jeder der beiden darin vorkommenden Summen ist aber sicherlich noch kleiner. Es steht daher durchaus im Einklang mit der auch sonst nur erreichbaren Genauigkeit, wenn in den Gl. (49a und b) die Summen über ν und μ von vornherein jeweils nur bis zum fünften Gliede erstreckt.

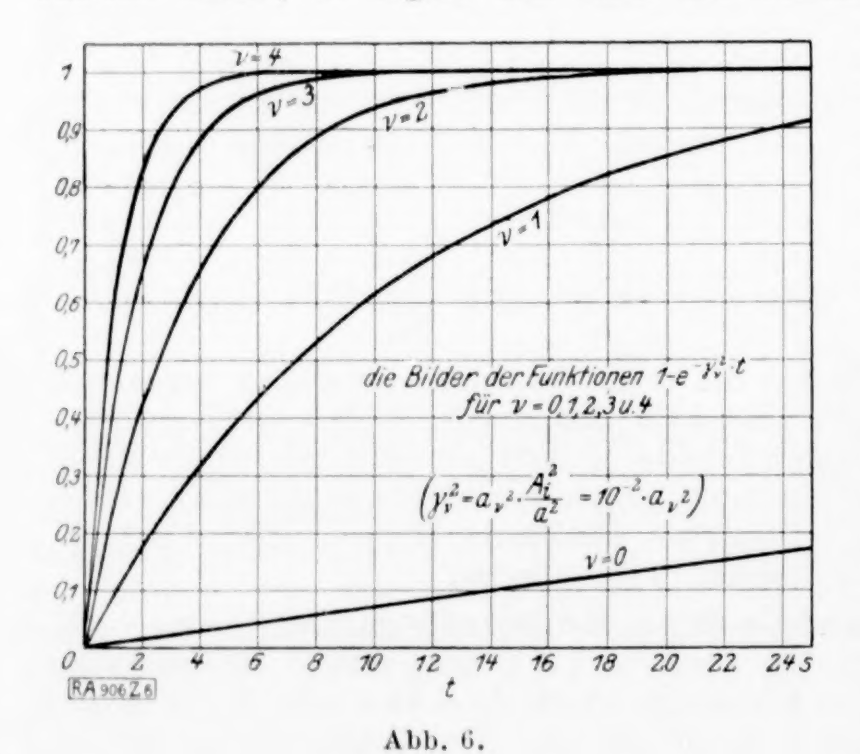


Abb. 6.

In den Gl. (49a u. b) treten in der Hauptsache als Zeitfunktionen Ausdrücke in der Form $1 - e^{-\gamma_\nu^2 t}$ auf. Um einen Ueberblick über ihren Verlauf zu geben,

sind sie in Abb. 6 graphisch dargestellt. Der Wert von $A_i^2 : a^2$ ist dabei speziell zu $10^{-2}\ s^{-1}$ angenommen. Besteht das Material, in dem der stromdurchflossene Leiter eingebettet liegt, aus Kabelmasse, so entspricht diesem Zahlenwert ein Radius a des zylindrischen Leiters von etwa 0,5 cm oder ein Querschnitt des Leiters von 78,5 mm².

Für denselben Zahlenwert von $A_i^2 : a^2$ ist in Abb. 7 der Temperaturverlauf $\Theta_0(t)$ des stromdurchflossenen Leiters nach Gl. (48) eingetragen. Für das Verhältnis $4\frac{c_i}{c_k}$ ist dabei der Wert 3 : 3,5 zu Grunde gelegt worden. Dies entspricht wiederum dem Fall eines Kupferleiters in Kabelmasse bei einer mittleren Temperatur von 100° C. Die voll ausgezogene Linie von $\Theta_0(t)$ der Abb. 7 ist entstanden unter Berücksichtigung der beiden Korrekturglieder $h_1(t)$ und $h_2(t)$ der Gl. (48). Die darunter verlaufende gestrichelte Linie entspricht der Gl. (48) ohne das zweite Korrekturglied $h_2(t)$. Der Einfluß dieses zweiten Korrekturgliedes ist also in Uebereinstimmung mit den vorher durchgeführten Konvergenzbetrachtungen nur klein. Er macht sich in der zeichnerischen Darstellung überhaupt erst nach einer Erwärmungszeit von 10 s bemerkbar. Wegen des wechselnden Vorzeichens der Glieder in der vollständigen Reihe für $\Theta_0(t)$ liegt der streng richtige, zeitliche Verlauf für den Temperaturanstieg jedenfalls zwischen den beiden erwähnten Kurven. Zum Vergleich ist in Abb. 7 noch der Temperaturanstieg beim Fehlen jeglicher Wärmeableitung eingetragen. Die strichpunktierte Kurve dicht unterhalb der Geraden gibt den Temperaturanstieg bei Wärmeabfuhr in Luft wieder. Dabei wurde gleichfalls ein Leiter mit dem Radius 0,5 cm zu Grunde gelegt und eine Wärmeübergangszahl von $\mu = 1{,}5$ mW/cm² °C angenommen.

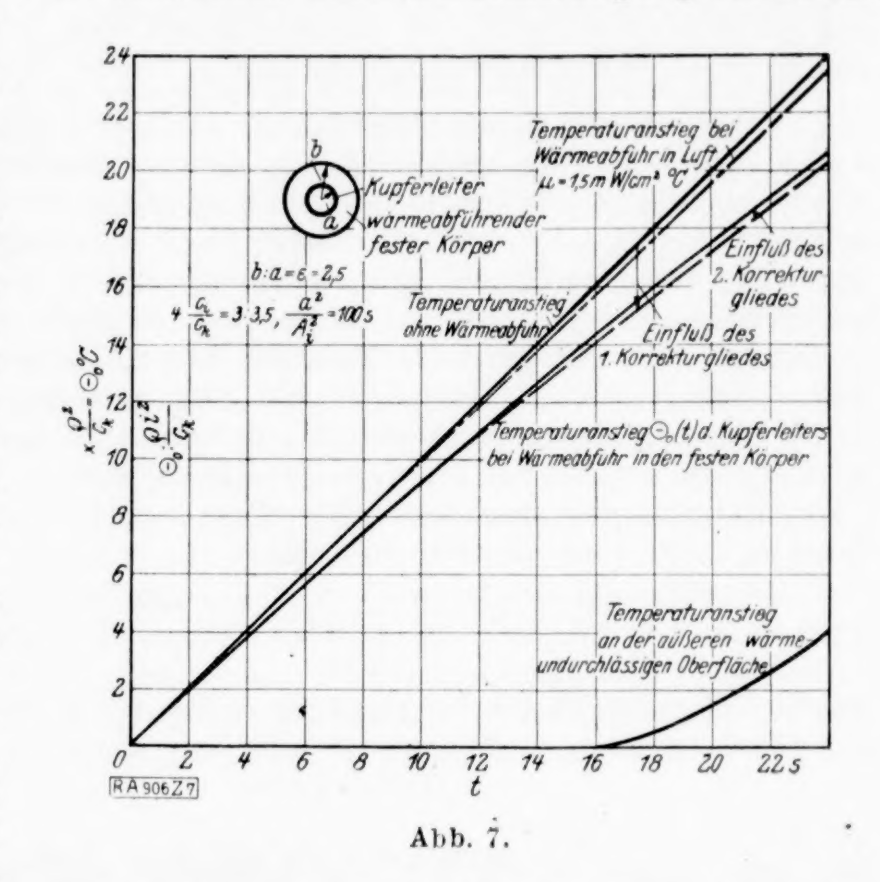


Abb. 7.

Die ganzen Rechnungen, die bisher über den Temperaturanstieg eines zylindrischen stromdurchflossenen Leiters angestellt wurden, gründeten sich auf der Annahme, daß die äußere Oberfläche des die Wärme aufnehmenden, festen Körpers wärmeundurchlässig sei. Als Kriterium dafür, ob es zulässig ist, die Resultate dieses idealisierten Falles auf die wirklichen Verhältnisse zu übertragen, ist der Verlauf der Temperatur an der äußeren Oberfläche anzusehen. Es muß daher noch festgestellt werden, wie sich innerhalb der bisher in betracht gezogenen Erwärmungszeiten der Erwärmungsvorgang an der äußeren wärmeundurchlässigen Haut gestaltet.

Die Formel für die Temperatur an der äußeren Oberfläche wurde schon fertig entwickelt. Es bleibt jetzt nur noch übrig, in die Gl. (40) für diese Temperatur den damals noch unbekannten Ausdruck $\Theta_0'(t)$ nach Gl. (46) einzusetzen. Mit den Abkürzungen

$$T_0 = \int_0^t \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varkappa_\nu h_\nu}{a_\nu} e^{-\gamma_\nu^2 (t-\alpha)} \Big) d\alpha = \frac{a^2}{A_i^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu \varkappa_\nu}{a_\nu^3} (1 - e^{-\gamma_\nu^2 t}) \quad . \quad . \quad . \quad (50\text{a}),$$

$$T_{1,2} = \int_0^t g_{1,2}(\alpha) \cdot \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varkappa_\nu h_\nu}{a_\nu} e^{-\gamma_\nu^2 (t-\alpha)} \Big) \cdot d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50\text{b})$$

schreibt sich der Ausdruck für die Temperatur $\Theta(b, t)$ an der äußeren wärmeundurchlässigen Oberfläche in der Form

$$\Theta(a,t) = \Theta_0(t) - \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{\varrho i^2}{c_k}\left[T_0 - 4\,\frac{c_i}{c_k}\,T_1 + 16 \cdot \left(\frac{c_i}{c_k}\right)^2 \cdot T_2 - \ldots\right] \quad . \quad . \quad (51),$$

worin $\Theta_0(t)$ die Temperatur des stromdurchflossenen Leiters nach (48) ist.

Um einen unmittelbaren Vergleich zu ermöglichen, ist in Abb. 7 auch noch der Temperaturverlauf $\Theta(b,t)$ nach (51) eingetragen. Bei dem im vorliegenden Fall gewählten Verhältnis $\varepsilon = 2{,}5$ setzt danach erst nach etwa $t = 16$ s ein merklicher Temperaturanstieg an der äußeren Oberfläche ein. Von diesem Zeitpunkt an wächst dann allerdings die Temperatur ziemlich schnell, und nach $t = 24$ s beträgt sie an der äußeren Oberfläche rund 19,4 vH der Temperatur des stromdurchflossenen Leiters. Dieser Temperaturanstieg an der äußeren Oberfläche macht sich nicht gleichzeitig auch in dem Temperaturverlauf $\Theta_0(t)$ des Kupferleiters bemerkbar, da eine solche Rückwirkung der Wärmestauung an der außeren Oberfläche erst dann eintreten wird, wenn der reflektierte Wärmestrom wieder am inneren, beheizten Körper anlangt.

Aus dieser Kontrollrechnung darf demnach geschlossen werden, daß bei einem $\varepsilon = 2{,}5$ jedenfalls bis zu etwa $t = 16$ s, also innerhalb der meisten praktisch vorkommenden Kurzschlußzeiten, das in Wirklichkeit vorliegende Problem der Wärmeabfuhr eines zylindrischen, stromdurchflossenen Leiters durch einen ihn umgebenden festen Körper mit wärmedurchlässiger Oberfläche so behandelt werden darf, als wenn diese Oberfläche wärmeundurchlässig ist. Dann ist aber auch in dem wirklichen Fall der Temperaturverlauf innerhalb der angegebenen Zeit mit hinreichender Annäherung durch Gl. (48) gegeben. Dabei kann man in Rücksicht auf den geringen Einfluß des zweiten Korrekturgliedes $h_2(t)$ auf den Gesamtwert von $\Theta_0(t)$ innerhalb dieser kleineren, für die Idealisierung als zulässig erkannten Erwärmungszeit dieses Glied noch fortlassen. Die Gleichung für den Temperaturanstieg eines stromdurchflossenen Leiters in einem festen Körper lautet demnach innerhalb Kurzschlußzeiten endgültig

$$\Theta_0(t) = \frac{\varrho i^2}{c_k} \cdot \left[t - 4\,\frac{c_i}{c_k} \cdot h_1(t)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48\,\mathrm{a}),$$

worin $h_1(t)$ gemäß Gl. (49 a) gegeben ist durch

$$h_1(t) = 1{,}283 \cdot t - \frac{a^2}{A_i^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{4} \frac{h_\nu}{a_\nu^4} \cdot \left(1 - e^{-\frac{A_i^2}{a^2} \cdot a_\nu^2\, t}\right)$$

An dem Ausdruck für $h_1(t)$ ist besonders bemerkenswert, daß in ihm h_ν und a_ν ganz bestimmte Zahlenwerte vorstellen, die unabhängig sind von den besonderen Verhältnissen, die gerade vorliegen. Sie können ohne weiteres aus der früheren Tabelle entnommen werden. Nur der Wert des Bruchs $a^2 : A_i^2$ hängt von der speziellen Natur der Aufgabe ab.

D. Schlußbemerkungen.

Die im Vorstehenden durchgeführten rechnerischen Untersuchungen über die Erwärmung stromdurchflossener elektrischer Leiter beziehen sich in der Hauptsache auf den Fall, daß diese Leiter wie bei Kabeln in festen Körpern eingebettet liegen. Sie haben für die beiden untersuchten Leiterformen ergeben, daß tatsächlich die Wärmeabfuhr bei solchen Leitern im Anfang des Erwärmungsvorganges wesentlich besser ist als bei blanken Leitern in Luft. Die in nächster Zeit zu erwartenden Hochstromversuche in besonderen Kurzschlußhäusern werden diese Verhältnisse weiter zu klären haben.

Wie an früherer Stelle erwähnt wurde, ist bei allen Rechnungen in der üblichen Weise angenommen worden, daß die Wärmeleitfähigkeit und die spezifische Wärme wesentlich unabhängig sind von der Temperatur. Es sind aber auch die Aenderungen im Aggregatzustand der wärmeleitenden Körper unberücksichtigt geblieben. Abgesehen davon, daß bei solchen Zustandsänderungen auch die Wärmeleitfähigkeit und die spezifische Wärme geändert werden, würde deren Berücksichtigung erfordern, auch die Schmelzwärme der beteiligten Körper in den Rechnungsgang aufzunehmen. Das Problem würde dadurch hoffnungslos kompliziert werden. Es wird auch in dieser Hinsicht die Aufgabe der Hochstromversuche sein müssen, den Anteil der Aenderung des Aggregatzustandes an der Wärmeabfuhr fester Körper klarzustellen. 906

Die reibungslose Strömung im Außengebiet zweier Kreise.

Von **M. LAGALLY** in Dresden.

1. Ziel der Untersuchung. Ausblick. In der Ebene sind zwei sich nicht schneidende Kreise gegeben; gesucht ist eine reibungslose Strömung, welche das ganze Außengebiet A der beiden Kreise erfüllt. Die Strömung soll im Endlichen singularitätenfrei sein, jedoch eine Geschwindigkeit im Unendlichen besitzen können. Auch wenn diese gegeben ist, ist damit die Strömung nicht eindeutig bestimmt; es gibt vielmehr ∞^2 Lösungen der Aufgabe, die erst dadurch eindeutig wird, daß man für die Zirkulation um jeden der beiden Kreise einen bestimmten Wert vorschreibt. Die Lösung des Problems gelingt mit Hilfe der konformen Abbildung des Außengebiets A auf ein Rechteck; es gibt 4 einfache Strömungen, aus denen sich die allgemeinste linear aufbauen läßt. Von besonderem Interesse ist die Bestimmung des Flusses, der durch die Lücke zwischen den beiden Kreisen hindurchgeht, welche die aus dem Unendlichen kommende Strömung einschnüren, und seine Abhängigkeit von den beiden Zirkulationen und der Geschwindigkeit im Unendlichen. —

Soweit ist die Untersuchung geführt. Sie dürfte mehr als das rein mathematische Interesse beanspruchen können, das sie als Beispiel einer Strömungs-Untersuchung in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiete besitzt. Denn die Ergebnisse lassen sich durch geeignete konforme Abbildung auf das Außengebiet von zwei beliebigen geschlossenen Kurven übertragen. Damit hat man die Grundlagen einer exakten ebenen Theorie des Doppeldeckers. Zwar bestehen die bekannten Schwierigkeiten für die Durchführung der Abbildung auf das Außengebiet vorgegebener Kurven. Leichter ist es, die Abbildungsfunktion so zu wählen, daß man Bildkurven erhält, welche als Konturen der Tragflächen eines Doppeldeckers wenigstens einigermaßen brauchbar sind und dem Joukowskischen Eindeckerprofil entsprechen. Um scharfe Hinterkanten beider Tragflügel zu bekommen und überdies glattes Abströmen an den Hinterkanten zu erreichen, hat man für die Abbildungsfunktion einen Verzweigungspunkt auf jedem der beiden Kreise vorzuschreiben, der in einen Staupunkt der um die Kreise fließenden Strömung fällt. — Auf diese Anwendungen sei hier nur hingewiesen, im folgenden wird nicht darauf eingegangen [1]).

2. Bipolare Koordinaten und zugehörige konforme Abbildung. Macht man 2 Punkte $Q_1(c, o)$ und $Q_2(-c, o)$ der x-Achse zu Scheiteln zweier Polarkoordinaten-Systeme r_1, ϑ_1 und r_2, ϑ_2 in der z-Ebene, so kann man die komplexe Veränderliche $z = x + iy$ eines Punktes $P(x, y)$ der z-Ebene in die beiden Formen

$$z = c + r_1 e^{i\vartheta_1} \quad \text{und} \quad z = -c + r_2 e^{i\vartheta_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

bringen. Dann führt der Quotient

$$\frac{z+c}{z-c} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

in bekannter Weise auf die bipolaren Koordinaten $\frac{r_2}{r_1}$ und $\vartheta_2 - \vartheta_1$ (Abb. 1a).

Die Kurven $\frac{r_2}{r_1} =$ konst. sind nach dem Satz des Apollonius die Kreise eines Kreisbüschels, das die Punkte Q_1 und Q_2 als reelle Nullkreise besitzt. Die Kurven $\vartheta_2 - \vartheta_1 =$ konst. sind nach dem Satz vom Peripheriewinkel die Kreise eines Kreisbüschels, das die Punkte Q_1 und Q_2 als reelle Schnittpunkte besitzt; jeder dieser Kreise zerfällt durch Q_1 und Q_2 in zwei Bogen, deren zugehörige Peripheriewinkel $\vartheta_2 - \vartheta_1$ bzw. $\vartheta_1 - \vartheta_2$ sich zu 2π ergänzen. — Die beiden Kreisbüschel sind orthogonal.

[1]) Zusatz bei der Korrektur. Hr. Stephan Bergmann machte mich darauf aufmerksam, daß Julius Bonder in seiner Diplomarbeit das gleiche Problem behandelt (Sitzungsber. u. Abhandlungen der Warschauer Polytechnischen Gesellschaft Bd. IV, 1 [1925]). J. Bonder verwendet die Methode der Bilder, erkennt jedoch nicht, daß die von ihm gefundenen Reihen nichts anderes sind als Partialbruchentwicklungen elliptischer Funktionen. (Vergl. das Referat von St. Bergmann über »Neuere polnische Arbeiten über Mechanik«, diese Zeitschr., Bd. 9 (1929), S. 241 bis 247. — Ferner behandelt Dmitri Riabouchinski in seinen Thèses (1922) im 2. Teil, Kap. IV (Mouvement cyclique plan d'un liquide autour d'un solide qui se meut parallèlement á une paroi rectiligne) ein etwas spezielleres Problem mittels Jacobischer Funktionen.

Führt man eine neue komplexe Veränderliche $Z = X + iY$ durch die Gleichung

$$Z = \lg \frac{z+c}{z-c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ein, die in

$$X = \lg \frac{r_2}{r_1}, \quad Y = \vartheta_2 - \vartheta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zerfällt, so gewinnt man eine konforme Abbildung der orthogonalen Kreisbüschel (Abb. 1b).

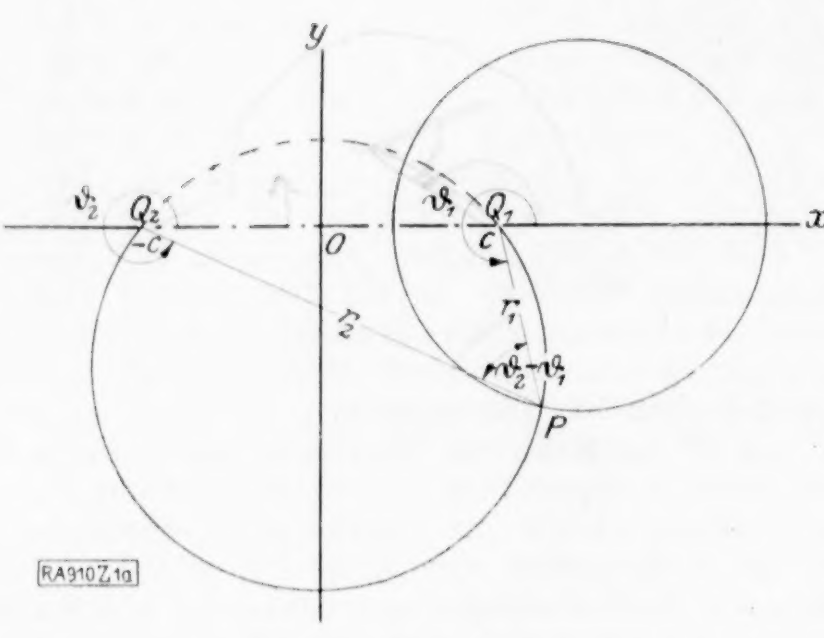


Abb. 1a.

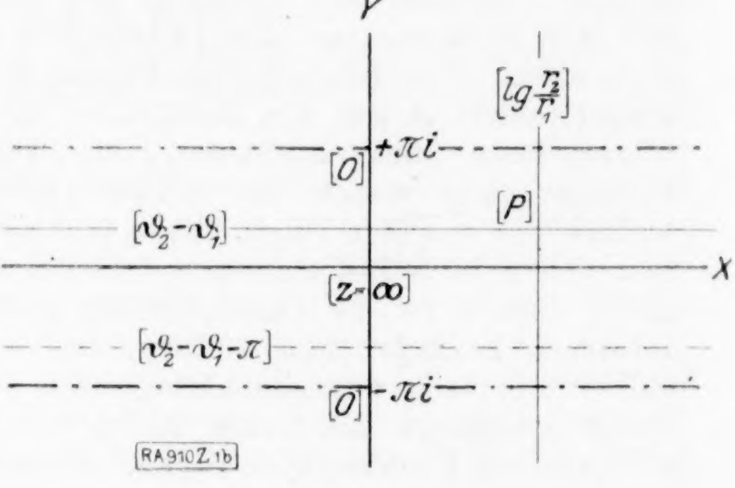


Abb. 1b.

Den Kreisen $\frac{r_2}{r_1}$ = konst. entsprechen in ein-eindeutiger Zuordnung die Geraden X = konst.; insbesondere den Nullpunkten Q_2 und Q_1 die Geraden $X = -\infty$ und $X = +\infty$. Den Kreisbogen $\vartheta_2 - \vartheta_1$ = konst. zwischen Q_1 und Q_2 entsprechen die Geraden Y = konst.; und zwar entsprechen, da die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt sind, jedem Bogen $\vartheta_2 - \vartheta_1$ = konst. unendlich viele Parallele Y = konst. im Abstand 2π.

Die ganze z-Ebene wird also auf die Z-Ebene unendlich vieldeutig, aber bereits auf einen von zwei Parallelen zur Y-Achse begrenzten Streifen von der Breite 2π ein-eindeutig konform abgebildet. Für die folgenden Untersuchungen wird als Bild der längs der Strecke $Q_1 Q_2$ aufgeschnittenen z-Ebene der zwischen den Geraden $Y = -\pi$ und $Y = +\pi$ gelegene Streifen der Z-Ebene betrachtet. Bei dieser Abbildung entspricht dem Punkt $z = \infty$ der Punkt $Z = 0$.

3. Das Strömungsfeld und sein konformes Bild. (Abb. 2a, b.) Es soll jetzt eine Strömung in der z-Ebene untersucht werden, die das Außengebiet A zweier sich ausschließender Kreise K_1 und K_2 des Kreisbüschels mit den reellen Nullkreisen Q_1 und Q_2 erfüllt. K_1 und K_2 sollen durch $\frac{r_2}{r_1} = \lambda$ bzw. $\frac{r_2}{r_1} = \mu$ bestimmt sein; dabei wird, wenn im Innern von K_1 der Nullkreis Q_1 und im Inneren von K_2 der Nullkreis Q_2 liegt, $\lambda > 1$, $\mu < 1$ sein. Setzt man zur Abkürzung $\lg \lambda = \alpha$, $\lg \mu = -\beta$,

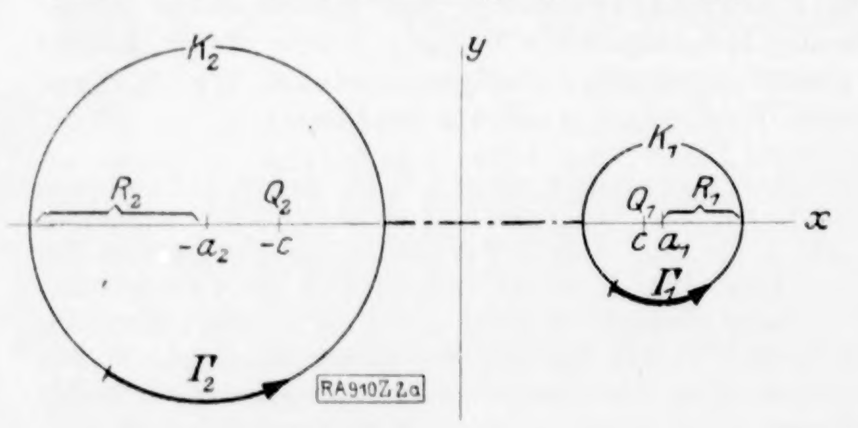


Abb. 2a.

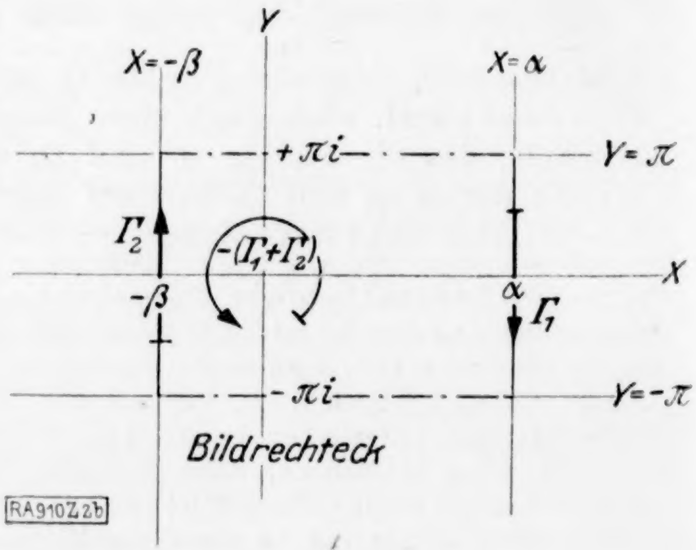


Abb. 2b.

so entsprechen den Kreisen K_1 und K_2 bei der konformen Abbildung die beiden Geraden $X = \alpha$ und $X = -\beta$.

Das Bild des Außengebietes A ist somit ein Rechteck, das von den 4 Geraden $X = \alpha$, $X = -\beta$, $Y = \pi$, $Y = -\pi$ gebildet wird. Die beiden Seiten $Y = \pi$, $Y = -\pi$ entsprechen dem unteren bzw. oberen Ufer eines Schnittes, der längs der x-Achse zwischen den beiden Kreisen geführt ist. Das Rechteck enthält den Punkt $Z = 0$ als inneren Punkt.

Wenn die Strömung in der z-Ebene die Zirkulationen Γ_1 und Γ_2 um die Kreise K_1 und K_2 hat, so verhält sich ihr komplexes Potential im Unendlichen wie

$$\Omega = -i\,\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \lg z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

$\Gamma_1 + \Gamma_2$ ist die Zirkulation um jede geschlossene Kurve, die K_1 und K_2 umschließt; der unendlich ferne Punkt der Strömung selbst hat den Charakter eines Wirbelpunktes von der Zirkulation

$$\Gamma = -(\Gamma_1 + \Gamma_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Bei der konformen Abbildung entspricht ihm ein Wirbelpunkt mit derselben Zirkulation im Punkt $Z = 0$. Das komplexe Potential der Bildströmung verhält sich also in der Umgebung dieses Punktes wie

$$\Omega = -i\,\frac{\Gamma}{2\pi} \lg Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Das läßt sich auch durch Rechnung bestätigen: Setzt man in (5) nach (3)

$$z = c\,\frac{e^Z + 1}{e^Z - 1},$$

so erhält man ein komplexes Potential

$$\Omega = i\,\frac{\Gamma}{2\pi} \lg\left(c\,\frac{e^Z + 1}{e^Z - 1}\right).$$

Die Funktion $\frac{e^Z + 1}{e^Z - 1}$ hat an der Stelle $Z = 0$ einen Pol erster Ordnung; es ist

$$\frac{e^Z + 1}{e^Z - 1} = \frac{2}{Z} + \frac{Z}{6} + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \ldots = \frac{1}{Z}\left[2 + \frac{Z^2}{6} + a_2 Z^3 + a_3 Z^4 + \ldots\right] \quad (8);$$

unter Weglassung einer in der Umgebung von $Z = 0$ regulären Strömung erhält man die Gl. (7).

Die Zirkulationen Γ_1 und Γ_2 selbst um die beiden Kreise K_1 und K_2 gehen bei der konformen Abbildung in Strömungen Γ_1 und Γ_2 längs der Rechteckseiten $X = \alpha$ und $X = -\beta$ über, die den beiden Kreisen entsprechen. Sind Γ_1 und Γ_2 positiv, so fallen sie in die negative Umlaufsrichtung um das Rechteck.

Die Strömung in der z-Ebene soll in A singularitätenfrei sein im Endlichen; doch sei eine Geschwindigkeit $w_\infty = u_\infty - i\,v_\infty$ im Unendlichen zugelassen. Die entstehende translatorische Strömung verhält sich im Unendlichen wie

$$\Omega = w_\infty\, z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9);$$

also die Bildströmung in der Umgebung des Punktes $Z = 0$ wie

$$\Omega = w_\infty\, c\,\frac{e^Z + 1}{e^Z - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

oder unter Weglassung einer regulären Strömung nach (8) wie

$$\Omega = \frac{2\,w_\infty\, c}{Z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10').$$

Sie besitzt im Punkt $Z = 0$ eine Doppelquelle.

Damit kann man das komplexe Potential Ω und die komplexe Geschwindigkeit $W = \frac{d\,\Omega}{d\,Z}$ der Bildströmung in der Umgebung des Punktes $Z = 0$ aufstellen. Nach (7) und (10') ist, wenn $P(Z)$ eine in der Umgebung des Nullpunkts reguläre Funktion bedeutet

$$\Omega = -i\,\frac{\Gamma}{2\pi} \lg Z + \frac{2\,w_\infty\, c}{Z} + P(z); \quad W = -i\,\frac{\Gamma}{2\pi Z} - \frac{2\,w_\infty\, c}{Z^2} + P'(z) \quad . \quad (11).$$

In allen anderen Punkten des Bildrechtecks sind Ω und W regulär.

4. Aufstellung des komplexen Potentials. Das komplexe Potential der Bildströmung ist nach (11) nur bis auf eine im Bildrechteck reguläre Funktion bestimmt. Die vollständige Bestimmung gelingt in folgender Weise: Die komplexe Geschwindigkeit in der z-Ebene ist

$$w = \frac{d\Omega}{dz} = \frac{d\Omega}{dZ}\frac{dZ}{dz} = W\left[\frac{1}{z+c} - \frac{1}{z-c}\right].$$

Da w eine in A eindeutige Funktion ist, gilt das gleiche von W; d. h. W muß als Funktion von Z die Periode $2\pi i$ besitzen, damit sie in sämtlichen Bildpunkten von z denselben Wert hat. Damit ferner $X=\alpha$ und $X=-\beta$ Stromlinien sind, müssen alle im Bildrechteck und außerhalb desselben gelegenen Singularitäten von W symmetrisch zu diesen beiden Geraden liegen. Es wird sich also auch die ganze Strömung im Bildrechteck spiegelbildlich über diese beiden Geraden hinaus fortsetzen. W muß also jedenfalls auch die Periode $2(\alpha+\beta)$ besitzen.

W ist somit eine doppelt-periodische Funktion mit den Perioden

$$2\omega_1 = 2(\alpha+\beta); \quad 2\omega_2 = 2\pi i \quad (12).$$

Das Periodenrechteck hat die doppelte Größe des Bildrechtecks; für die folgenden Betrachtungen ist ein Periodenrechteck zugrunde gelegt, das aus dem Bildrechteck und seinem Spiegelbild an der Geraden $X=-\beta$ besteht. In ihm hat W außer der Singularität im Nullpunkt noch eine hierzu spiegelbildliche Singularität im Punkt -2β (Abb. 3). Also ist W eine elliptische Funktion, die in der Form

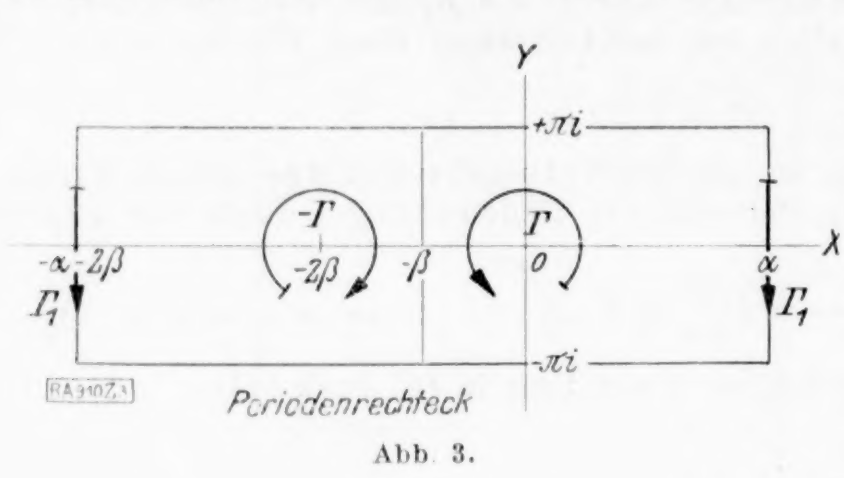


Abb. 3.

$$W = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{Z} + i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{Z+2\beta} - \frac{2c(u_\infty - iv_\infty)}{Z^2} - \frac{2c(-u_\infty - iv_\infty)}{(Z+2\beta)^2} + R(Z) \quad (13)$$

angesetzt werden kann, wobei $R(Z)$ eine im Periodenrechteck reguläre Funktion bedeutet. Diese elliptische Funktion ist durch ihre Pole bis auf eine additive Konstante bestimmt; setzt man noch abkürzend

$$u_\infty + iv_\infty = w_\infty \quad \text{neben} \quad u_\infty - iv_\infty = \overline{w}_\infty,$$

so ist[1])

$$W = -i\frac{\Gamma}{2\pi}[\zeta(Z) - \zeta(Z+2\beta)] - 2c[\overline{w}_\infty\, p(Z) - w_\infty\, p(Z+2\beta)] + i\varkappa \quad (14).$$

Die additive Konstante ist aus einem später ersichtlichen Zweckmäßigkeitsgrund in der imaginären Form $i\varkappa$ eingeführt; sie könnte dadurch bestimmt werden, daß man den Wert der Geschwindigkeit an einer Stelle des Strömungsfeldes vorschreibt; $\varkappa$ erweist sich dabei als reell; indessen zeigt sich bald ein besserer Weg zur Bestimmung von $\varkappa$.

Das komplexe Potential wird

$$\Omega = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\lg\frac{\sigma(Z)}{\sigma(Z+2\beta)} + 2c[\overline{w}_\infty\,\zeta(Z) - w_\infty\,\zeta(Z+2\beta)] + i\varkappa Z + \varkappa' \quad (15);$$

hier ist $\varkappa'$ eine neue additive Konstante, die beliebig gewählt werden kann. Am einfachsten wird man $\varkappa'=0$ setzen. Es ist aber zu beachten, daß Ω auch dann noch eine unendlich vielwertige Funktion ist; denn da sich $\lg\frac{\sigma(Z)}{\sigma(Z+2\beta)}$ beim Umlaufen eines Pols um $\pm 2\pi i$ ändert, ändert sich Ω selbst um $\pm\Gamma$.

Um Ω im Periodenrechteck einwertig zu machen, muß man das Umlaufen der beiden Pole 0 und -2β verhindern; das geschieht durch Führen eines Schnittes längs des sie verbindenden Stückes der x-Achse.

5. Zusammenhang zwischen Zirkulation und Fluß. Die Funktion $\Omega(Z)$ ist eine elliptische Transzendente und ändert sich um je eine additive Konstante, wenn sich das Argument Z um eine Periode $2\omega_1$ oder $2\omega_2$, zusammenfassend 2ω geschrieben, ändert.

[1]) Burkhardt-Faber, Elliptische Funktionen § 30.

Um diese Zuwächse zu berechnen, sei $\Omega(Z)$ in folgende Form gesetzt, an der zu bemerken ist, daß der Faktor von u_∞ eine elliptische Funktion ist:

$$\left.\begin{aligned}\Omega(Z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\lg\frac{\sigma(Z)}{\sigma(Z+2\beta)} + 2cu_\infty[\zeta(Z)-\zeta(Z+2\beta)]\\ -2icv_\infty[\zeta(Z)+\zeta(Z+2\beta)]+i\varkappa Z\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (16).$$

Dann ist

$$\Omega(Z+2\omega)-\Omega(Z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\lg\frac{\sigma(Z+2\omega)\,\sigma(Z+2\beta)}{\sigma(Z+2\beta+2\omega)\,\sigma(Z)}$$
$$-icv_\infty[\zeta(Z+2\omega)+\zeta(Z+2\beta+2\omega)-\zeta(Z)-\zeta(Z+2\beta)]+2i\varkappa\omega.$$

Aus den Eigenschaften der ζ- und σ-Funktion [1])

$$\zeta(Z+2\omega)-\zeta(Z) = 2\eta, \qquad \frac{\sigma(Z+2\omega)}{\sigma(Z)} = e^{-2\eta(Z+\omega)},$$

wo η zusammenfassend für $\eta_1 = \zeta(\omega_1)$, $\eta_2 = \zeta(\omega_2)$ geschrieben ist, folgt sofort, für die beiden Perioden getrennt geschrieben

$$\Omega(Z+2\omega_1)-\Omega(Z) = i[2/\pi\,\Gamma\beta\eta_1 - 8cv_\infty\eta_1 + 2\varkappa\omega_1] \quad . \quad . \quad (17a),$$
$$\Omega(Z+2\omega_2)-\Omega(Z) = i[2/\pi\,\Gamma\beta\eta_2 - 8cv_\infty\eta_2 + 2\varkappa\omega_2] \quad . \quad . \quad (17b).$$

Hier ist zu bemerken, daß ω_1 und η_1 reell, ω_2 und η_2 rein imaginär sind, daß also die rechte Seite von (17a) rein imaginär, die von (17b) reell ist. Diese Bemerkung führt zur hydrodynamischen Deutung des Ergebnisses. Zerlegt man das komplexe Potential $\Omega = \varphi + i\psi$ in Real- und Imaginär-Teil, so bedeutet φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Stromfunktion. Verbindet man zwei Punkte P_1 und P_2 in einem Gebiet, in dem Ω eindeutig ist, durch einen beliebigen Weg, und zerlegt die Differenz $\Omega_2 - \Omega_1$ in derselben Weise:

$$\Omega_2 - \Omega_1 = (\varphi_2 - \varphi_1) + i(\psi_2 - \psi_1),$$

so ist $\varphi_2 - \varphi_1$ die Strömung längs des Weges $P_1 P_2$ und $\psi_2 - \psi_1$ der Fluß durch diesen Weg, nach rechts positiv gerechnet.

Also ist $\Omega(Z+2\omega_1)-\Omega(Z)$ bis auf den Faktor i der Fluß durch die horizontale Seite des Periodenrechtecks; setzt man $\Omega(Z+2\omega_1)-\Omega(Z) = -2iF$, so ist F der nach links positiv gerechnete Fluß durch die horizontale Seite des Bildrechtecks, oder auch, wegen der Invarianz von Ω bei konformer Abbildung, der nach links positiv gerechnete Fluß durch eine beliebige Verbindungslinie zweier Punkte der Kreise K_1 und K_2.

Aehnlich ist $\Omega(Z+2\omega_2)-\Omega(Z)$ die Strömung längs einer vertikalen Seite des Periodenrechtecks, also $-\Gamma_1$; oder bis auf das Vorzeichen die Zirkulation um den Kreis K_1 (Abb. 3).

Somit folgt aus (17a, b)

$$-2iF = i[2/\pi\,\Gamma\beta\eta_1 - 8cv_\infty\eta_1 + 2\varkappa\omega_1] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18a),$$
$$-\Gamma_1 = i[2/\pi\,\Gamma\beta\eta_2 - 8cv_\infty\eta_2 + 2\varkappa\omega_2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18b).$$

Jede dieser Gleichungen würde eine Berechnung der Konstanten $\varkappa$ zulassen mit Hilfe von Größen Γ_1, Γ, F, v_∞, von denen die Strömung um die beiden Kreise abhängt. Eliminiert man anderseits $\varkappa$ aus den beiden Gleichungen unter Verwendung der Legendreschen Relation [2])

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}, \qquad (19)$$

so erhält man eine interessante Beziehung zwischen den hydrodynamischen Größen:

$$-2iF\omega_2 + \Gamma_1\omega_1 = -\Gamma\beta + 4\pi cv_\infty.$$

Diese vereinfacht sich nach (6) und (12) in

$$2\pi F = 4\pi cv_\infty - \Gamma_1\alpha + \Gamma_2\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Diese Gleichung gibt den Fluß, der zwischen den beiden Kreisen hindurchgeht, wenn die Geschwindigkeit im Unendlichen und die Zirkulationen um beide Kreise gegeben sind.

[1]) Burkhardt-Faber, § 25, 26.
[2]) Burkhardt-Faber, § 25 (14).

6. Diskussion der möglichen Strömungen. Ist die gegenseitige Lage zweier Kreise durch die 3 Konstanten α, β, c gegeben, so ist damit die Strömung im Außengebiet beider Kreise nicht eindeutig bestimmt; auch dann nicht, wenn man die Geschwindigkeit im Unendlichen $w_\infty = u_\infty - i\,v_\infty$ vorgibt. Nach (16) gibt es ∞^2 verschiedene Strömungen je nach Wahl der Konstanten Γ und $\varkappa$, oder auch, wenn man

$$i\varkappa = \frac{i}{2\pi}\Gamma_1 - \frac{1}{\pi^2}\Gamma\beta\eta_2 + \frac{4}{\pi}c\,v_\infty\eta_2$$

aus (18b) entnimmt, nach Wahl der Konstanten Γ und Γ_1.

Führt man neben $\Gamma = -(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ noch die Größe

$$\Gamma' = \Gamma_1 - \Gamma_2$$

ein, setzt also

$$i\varkappa = \frac{i}{4\pi}\Gamma' - \frac{i}{4\pi}\left(1 - \frac{4\,i\,\beta\,\eta_2}{\pi}\right)\Gamma + \frac{4}{\pi}c\,v_\infty\eta_2,$$

so erscheint das komplexe Potential (16) in folgender Form (aus der die unsymmetrische Bevorzugung der Größe β vor α nach (12) und (19) beseitigt werden könnte):

$$\left.\begin{aligned}\Omega(Z) = \frac{i}{4\pi}\Gamma' Z - \frac{i}{4\pi}\Gamma\left[2\lg\frac{\sigma(Z)}{\sigma(Z+2\beta)} + \left(1 - \frac{4\,i\,\beta\,\eta_2}{\pi}\right)Z\right]\\ + 2\,c\,u_\infty[\zeta(Z) - \zeta(Z+2\beta)] - 2\,i\,c\,v_\infty\left[\zeta(Z) + \zeta(Z+2\beta) + \frac{2\,i\,\eta_2}{\pi}Z\right]\end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Das viergliedrige Aggregat auf der rechten Seite läßt ersehen, daß die ganze Strömung durch lineare Superposition von 4 Teilströmungen entsteht, für deren jede nur eine der 4 Größen Γ', Γ, u_∞, v_∞ von Null verschieden ist.

Bei der ersten Teilströmung $\frac{i}{4\pi}\Gamma' Z$ sind, wenn man in die z-Ebene zurückkehrt, die beiden Zirkulationen entgegengesetzt gleich: $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma'/2$. Die Stromlinien sind die Kreise des Büschels; die Geschwindigkeit im Unendlichen ist Null.

Bei der zweiten Teilströmung mit dem Faktor Γ sind die beiden Zirkulationen gleich: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\Gamma/2$; die Geschwindigkeit im Unendlichen ist Null.

Die dritte Teilströmung mit dem Faktor u_∞ ist eine zirkulationsfreie Translationsströmung in Richtung der Zentrale beider Kreise.

Die vierte Teilströmung mit dem Faktor v_∞ ist eine zirkulationsfreie Translationsströmung senkrecht zur Richtung der Zentrale beider Kreise.

Führt man in (20) die Konstanten Γ und Γ' ein, so läßt diese Gleichung die Anteile der Teilströmungen an dem zwischen beiden Kreisen hindurchgehenden Fluß erkennen.

$$2\pi F = 4\pi c\,v_\infty + \frac{\alpha-\beta}{2}\Gamma - \frac{\alpha+\beta}{2}\Gamma' \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Für zirkulationsfreie Strömungen reduziert sich (22) auf

$$F = 2\,c\,v_\infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22');$$

das ist auch der Fluß einer ungestörten translatorischen Strömung durch einen Kanal von der Breite $2c$; der Fluß, der zwischen den beiden Kreisen hindurchgeht, ist unabhängig von dem wirklichen Abstand beider Kreise und ändert sich nicht, wenn man die beiden Kreise durch andere desselben Büschels ersetzt; die wirksame Breite der Lücke zwischen zwei Kreisen ist der Abstand der Nullkreise des durch die beiden Kreise bestimmten Büschels.

7. Einführung der Radien und des Mittelpunkts-Abstands beider Kreise. Die Verwendung bipolarer Koordinaten hat den Nachteil, daß die beiden Kreise K_1 und K_2 nicht durch ihre Radien R_1 und R_2 und die Abszissen a_1 und $-a_2$ ihrer Mittelpunkte, bzw. den Mittelpunktsabstand $d = a_1 + a_2$ gegeben sind, sondern durch drei Konstanten α, β, c, welche die Kreise nur mittelbar bestimmen. Es sind also noch die Gleichungen anzugeben, die zur Einführung von R_1, R_2, d dienen (Abb. 2a).

Die Gleichung des ersten Kreises K_1 ist in bipolaren Koordinaten $\frac{r_2}{r_1} = e^\alpha$; um rechtwinklige Koordinaten einzuführen, kann man $\frac{r_2}{r_1}$ durch $\frac{|\mathfrak{z}+c|}{|\mathfrak{z}-c|}$ ersetzen. Eine einfache Umformung gibt die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 - 2\,x\,c\,\mathfrak{Cotg}\,\alpha + c^2 = 0,$$

aus der sich

$$a_1 = c\,\mathfrak{Cotg}\,\alpha; \quad R_1 = \frac{c}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}$$

entnehmen lassen.

Für den zweiten Kreis K_2 folgen aus $\frac{r_2}{r_1} = e^{-\beta}$ die entsprechenden Werte

$$-a_2 = -c\,\mathfrak{Cotg}\,\beta; \quad R_2 = \frac{c}{\mathfrak{Sin}\,\beta}.$$

Man hat also, wenn die beiden Radien R_1, R_2 und der Mittelpunktsabstand d gegeben sind, die drei Gleichungen

$$R_1 = \frac{c}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}; \quad R_2 = \frac{c}{\mathfrak{Sin}\,\beta}; \quad d = c\,(\mathfrak{Cotg}\,\alpha + \mathfrak{Cotg}\,\beta) \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

zur Berechnung von α, β, c. Um diese drei Gleichungen einfach und elegant zu lösen, bedarf es der Einführung einer (übrigens konform-invarianten) Hilfsgröße, nämlich des imaginären Schnittwinkels der beiden Kreise.

Allgemein ergibt sich der Schnittwinkel ω zweier Kreise aus

$$\cos\omega = \frac{d^2 - R_1{}^2 - R_2{}^2}{2\,R_1\,R_2};$$

für $d > R_1 + R_2$ wird der Winkel imaginär. Setzt man $\omega = i\,J$, also $\cos\omega = \mathfrak{Cof}\,J$, so hat man zur Berechnung der Hilfsgröße J die Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\,J = \frac{d^2 - R_1{}^2 - R_2{}^2}{2\,R_1\,R_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

J läßt sich auch durch das Größensystem α, β, c ausdrücken; aus (23) und (24) folgt

$$\mathfrak{Cof}\,J = \mathfrak{Cof}\,(\alpha + \beta); \text{ also } J = \alpha + \beta.$$

Nun ergibt sich die Auflösung der Gl. (23) in einfachster Form:

$$c = \frac{R_1\,R_2}{d}\,\mathfrak{Sin}\,J, \quad \mathfrak{Sin}\,\alpha = \frac{R_2}{d}\,\mathfrak{Sin}\,J, \quad \mathfrak{Sin}\,\beta = \frac{R_1}{d}\,\mathfrak{Sin}\,J \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wobei J aus (24) zu entnehmen ist. 910

Die einfach geführten Kapillar- und Schwerewellen in fließenden Mitteln. I.

Von **K. ULLER** in Gießen.

1. Einleitung und Voraussetzungen. Nachdem wir die Wellen von elementarer Schwankungsform — geführt von mehreren Unstetigkeitsflächen im Fließenden — kennen gelernt haben[1]), kehren wir nun zurück zu der vorletzten Abhandlung[2]), in welcher zum ersten Verständnis und zur größeren Sicherheit zunächst einmal beschränkend dreierlei vorausgesetzt war: daß nur eine U-Fläche existiert, indem benachbarte U-Flächen weit entfernt seien, daß diese eine eben ist, und schließlich, daß die geführte Welle an dieser U-Ebene planwellig sei. Wir wollen jetzt das gewonnene Gleichungssystem dieser Welle für zwei Grenzfälle eingehend analysieren, nämlich für reine Kapillarwellen und für reine Schwerewellen. Unsere Grundvoraussetzungen waren zwei dichtebeständige und und unzähe Mittel in flüssigem oder gasigem Zustande und eine Wellenquelle mit wirbelfreier Erregung. Sodann haben wir die obigen Beschränkungen, die auf freiwillige Vernachlässigungen hinauslaufen, eingeführt. Grundsätzlich läßt sich das Gleichungssystem der geführten Welle sehr wohl in Strenge darstellen — es ist dies sogar nötig, um allgemeine Sätze herleiten zu können —, nur daß es ungeheuer verwickelt, undurchsichtig und ungeeignet für die Praxis ausfällt, die ja dann genötigt ist, hinterher Streichungen vorzunehmen. Die bisherige mathematische Behandlung dieser Art Wellen mußte mit Annahmen operieren, nicht etwa um mathematischen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, sondern weil ohne sie kein Schritt vorwärts getan werden konnte. Das ist ganz

[1]) K. Uller, Die mehrfach geführten Wellen der reinen Hydro- und Aerodynamik. Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 283.

[2]) K. Uller, Die geführten Schwerewellen an der Grenze zweier fließenden Mittel. Ebenda Bd. 7 (1927), S. 129.

etwas anderes als freiwillige Vernachlässigungen. Von Annahmen weiß man ferner nicht, ob sie lediglich in einem Einzelfalle zutreffen, und ob sie nicht gar den Kern des Problems zerstört haben. Im vorliegenden Falle kann man beides nachweisen. Sie sind hier der mathematische Ausdruck für das Unvermögen, das Problem zu meistern. Darüber später mehr. Es ist notwendig, dies in aller Deutlichkeit auszusprechen.

Es ist interessant, daß die Welle abhängt von den absoluten Werten der beiden Flußgeschwindigkeiten gegenüber einem Bezugsystem, in welchem das äußere Kraftfeld stationär ist. Ferner ist das Druckfeld der Welle im Fließenden nicht nur verschieden von dem der Welle im Ruhenden, sondern auch von der Richtung der Flußgeschwindigkeit ($\mathfrak{v}$) zur Wellenfortpflanzung ($\mathfrak{w}$). Wenn ($\mathfrak{v}\mathfrak{w}$) sein Vorzeichen wechselt, ist der isotrope Druck P an derselben Stelle ein anderer. Die Welle ist nicht umkehrbar.

Das entwickelte Gleichungssystem führt auf die Fundamentalgröße $\sqrt{\mathfrak{w}_t^2} = x$, die bei Planwelligkeit $\mathfrak{w}_t$ und ($\mathfrak{w}\mathfrak{f}$) in beiden Mitteln völlig bestimmt, sofern noch der Winkel zwischen $\mathfrak{w}_t'$ und $\mathfrak{w}_t''$ vorgegeben ist. Dadurch ist nun im Verein mit dem Wellenskalar ω die geführte Geschwindigkeitswelle bei der vorausgesetzten Erregungsform bestimmt. Zwar ist die Festsetzung (3) in § 4 der angezogenen Abhandlung (2) eine willkürliche, indem gleichberechtigt auch $-(\mathfrak{w}_1\mathfrak{f}) = +(\mathfrak{w}_2\mathfrak{f}) = i\sqrt{\mathfrak{w}_t^2}$ zu setzen erlaubt wäre. Jede der beiden zieht sich aber auch durch (7) ebenda hindurch derart, daß mit keiner von beiden eine Willkürlichkeit in das Gleichungssystem der geführten Welle sich einschleicht. Nach der in § 4 getroffenen Festsetzung bedeutet nun ein positiv reeller Wurzelanteil $x' : (\mathfrak{w}_1''\mathfrak{f}) = -(\mathfrak{w}_2''\mathfrak{f}) > 0$, d. h. wenn wie immer die Flächennormale $\mathfrak{f}$ von (1) nach (2) gerichtet ist, zeigt die geführte Welle an U beiderseits von U weg abfallende Intensitäten, also einen Grat im Querrelief der Intensitätsdarstellung. Entsprechend bedeutet ein negativ reeller Wurzelanteil $x' : (\mathfrak{w}_1''\mathfrak{f}) = -(\mathfrak{w}_2''\mathfrak{f}) < 0$, somit beiderseits von U weg ansteigende Intensitäten, also eine Rinne im Querrelief. Positive und negative x' treten nun tatsächlich auf. Ob Grat- oder Rinnewelle, das bestimmt die Einwirkung von geführten Wellenflanken an benachbarten U-flächen, deren sonstiger Einfluß hier aber völlig vernachlässigt ist. Beide Möglichkeiten sind mathematisch gleichberechtigt, keine hat vor der anderen etwas voraus. Der imaginäre Wurzelanteil x'' bedeutet entsprechend $-(\mathfrak{w}_1'\mathfrak{f}) = +(\mathfrak{w}_2'\mathfrak{f})$. Ist $x'' \neq 0$, dann existiert eine Tangentialkomponente $\mathfrak{w}_t''$ der Verlöschung; mit ihr sind stets Normalkomponenten der Phasennormale $\mathfrak{w}'$ in beiden Mitteln verbunden, die ebenfalls doppeltes Vorzeichen haben können, da auch x'' sowohl positiv wie negativ auftreten kann, wie wir bald sehen werden. Diese Mehrdeutigkeiten werden in späteren Abhandlungen eine wichtige Rolle spielen. Alle diese verschiedenen Wellenformen müssen auch in der Wirklichkeit auftreten können, modifiziert natürlich in erster Linie durch die Zähigkeiten. Die Schaukurven für die Rinnewellen sind selbstverständlich für die absoluten Werte von x' gezeichnet. In den Gleichungen tritt der Faktor $e^{(\mathfrak{w}_t''\mathfrak{r})}$ auf. Er bedeutet nicht Energieverschluckung, die ja ausgeschlossen worden ist, sondern hier eine seitliche Energiestauung in Richtung $\mathfrak{w}''$.

Wir definieren als (mittlere) Amplitude einer Welle ($\mathfrak{B}$)

$$A = e^{-\{\nu'' t - (\mathfrak{w}''\mathfrak{r})\}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}\{\mathfrak{B}_{max}^2 + \mathfrak{B}_{min}^2\}} = e^{-\{\nu'' t - (\mathfrak{w}''\mathfrak{r})\}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}\,\omega\,\omega^*(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*)} \qquad (1),$$

wobei $\mathfrak{B}_{max}$ und $\mathfrak{B}_{min}$ die Maximal- bzw. Minimalwerte der Geschwindigkeit in der Schwingungsellipse sind, wie sie ohne Dämpfung beschrieben würde. In einer geführten Planwelle ist wegen (3) § 4 der Abhandlung (2)

$$A = e^{-\{\nu'' t - (\mathfrak{w}''\mathfrak{r})\}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}\,\omega\,\omega^*\{(\mathfrak{w}_t\mathfrak{w}_t^*) + |\mathfrak{w}_t^2|\}} \quad \ldots\ldots \quad (1'),$$

also für beide Flanken gleich.

Auch wenn äußere Kräfte im Ausbreitungsgebiet nicht vorhanden sind (grad $\Pi = 0 = c$), existiert nach Gl. (6) § 3 ebenda ein isotropes Druckfeld, falls $\dot{\Omega}$ oder $\mathfrak{v} \neq 0$ ist, also eine Welle oder ein Fluß existiert, weil die Flüssigkeit Trägheitswiderstand ausübt. In der geführten Welle ist dann nach (3) und (7) § 4

$$D_2\{\nu_2 - (\mathfrak{v}_2\mathfrak{w}_2)\} + D_1\{\nu_1 - (\mathfrak{v}_1\mathfrak{w}_1)\} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{D_1 + D_2}{2} = D_m; \quad \frac{D_1\beta_1 + D_2\beta_2}{D_1 + D_2} = \beta_m; \quad \beta = (\mathfrak{j}\mathfrak{v}) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und mit Hilfe von Gl. (8) § 4 ebenda geht (2) über in

$$\sqrt{\mathfrak{w}_t^2} = x = \frac{\nu_1}{\beta_m + i\,\frac{D_2}{D_m}(\mathfrak{v}\mathfrak{f})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Auch wenn im Ausbreitungsgebiet keine äußeren Kräfte wirken, erlaubt die Druckbedingung nur eine bestimmte Welle an U. Nur wenn β_m und $(\mathfrak{v}\mathfrak{k})$ verschwinden, die Bewegungsgrößen sich also aufheben, ist eine geführte Welle unmöglich.

Dämpfung der Quelle $(\nu \neq 0)$ oder Querverschiebung der Trennfläche $(\mathfrak{v}\mathfrak{k}) \neq 0$ bewirken eine Tangentialkomponente der Verlöschung, wobei die Phasen nicht parallel der Trennfläche laufen. Im Falle $\nu'' = 0 = (\mathfrak{v}\mathfrak{k})$ ist $\frac{\nu}{x} = \beta_m$, die Wellengeschwindigkeit also gleich der mittleren Flußgeschwindigkeit. Interessant sind folgende drei Fälle:

1. $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$, so daß $\beta_m = (\mathfrak{j}\mathfrak{v})$; 2. $\mathfrak{v}_1 = -\mathfrak{v}_2$, so daß $\beta_m = \beta_1 (D_1 - D_2) : (D_1 + D_2)$;

3. $D_1 = D_2$, so daß $\beta_m = \left(\mathfrak{j}, \frac{\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2}{2}\right)$.

Wir verfolgen weiter nur Fälle, wo $(\mathfrak{v}\mathfrak{k}) = 0$, so daß $\nu_1 = \nu_2$, ein Doppler-Effekt durch die Bewegung der Flüssigkeiten also nicht auftritt. Von den Flußgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ kommen dann lediglich ihre Projektionen auf die Tangentialrichtung $\mathfrak{w}_t$ der Welle inbetracht. Gleichwertig mit Ruhe ist daher Querbewegung des Mittels gegenüber jener Wellenrichtung. Ferner beschränken wir uns auf $\operatorname{grad}_t \Pi = 0$, wenn also die U-Ebenen zugleich Niveauflächen $\Pi = \text{const.}$ sind. Dann ist (6) § 4 ebenda erfüllt. Zugleich ist dann auch $(\mathfrak{w}_t \operatorname{grad} \Pi) = 0$. Beide Bedingungen sind übrigens auch erfüllt, wenn Fluß und Welle beide normal zu $\operatorname{grad}_t \Pi \neq 0$ verlaufen. Schließlich beschränken wir uns auf die meist vorkommenden Fälle, wo $[\mathfrak{w}_t' \mathfrak{w}_t''] = 0$, also $\mathfrak{w}_t''$ gleich- oder gegengerichtet zu der Richtung $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{w}_t'$ ist. Wir können dann das in § 4 skizzierte, durchgreifende Verfahren anwenden, das mit zwei Einsätzen in die Bedingungsgleichung für $\sqrt{\mathfrak{w}_t^2} = x$ arbeitet, um alle Lösungen herauszuholen, die unter Beibehaltung desselben $(\mathfrak{j}\mathfrak{v}) = \beta$ möglich sind. Hier und in folgenden Abhandlungen soll der Faktor $(\pm)$ besagen, daß das obere Zeichen für den Einsatz (βx), das untere für den Einsatz $(-\beta x)$ gelten soll. Beim Einsatz $(+)$, wobei nur positive x' eine wellenkinematische Bedeutung haben, bedeutet $x'' \lessgtr 0$, daß $\mathfrak{w}_t''$ mit $\mathfrak{w}_t'$ gleich- bzw. zu $\mathfrak{w}_t'$ gegengerichtet ist. Beim Einsatz $(-)$, wobei nur negative x' in Frage kommen, bedeutet $x'' \lessgtr 0$, daß $\mathfrak{w}_t''$ zu $\mathfrak{w}_t'$ gegen- bzw. mit $\mathfrak{w}_t'$ gleichgerichtet ist. Endlich ist es nötig daran zu erinnern, daß alle unsere Lösungen um so ungenauer sind, je größer die Geschwindigkeiten ausfallen, weil wir ja in Gl. (11) § 3 u. ff. ebenda quadratische Glieder $(\mathfrak{V} - \mathfrak{v}, \nabla)\mathfrak{V}$ vernachlässigt haben.

Treten wir jetzt in die Erörterung der beiden Grenzfälle ein. Die Existenz der Flußgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ in Produktverbindungen mit den Wellengradienten $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ verwickelt die Formeln schon unter unseren Beschränkungen sehr; die Untersuchung der möglichen geführten Wellen im Fließenden wird, wenn auch nicht schwierig, so doch langwierig. Dafür werden aber zum ersten Male Vorgänge einwandfrei behandelt und in Schaukurven niedergelegt, die bisher einer einwandfreien Darlegung widerstanden.

2. Die reine Kapillarwelle; grad $\Pi = 0$. Die Gl. (7) § 4 der Abhandlung (2) liefert in Verbindung mit (3) daselbst

$$-D_2 \{\nu - (\mathfrak{v}_2 \mathfrak{w}_t)\} - D_1 \{\nu - (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{w}_t)\} + \frac{c}{\nu} \mathfrak{w}_t^2 \sqrt{\mathfrak{w}_t^2} = 0$$

$$\text{mit } (\mathfrak{v}\mathfrak{w}_t) = \beta \{(\mathfrak{w}_t') \pm i (\mathfrak{w}_t'')\} = \beta \sqrt{\mathfrak{w}_t^2} = \beta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Bei dem angenommenen Ausfall des äußeren Kraftfeldes wirkt keines der beiden Mittel bevorzugend, trotz verschiedener Dichte und Flußgeschwindigkeit; es treten lediglich die mittlere Dichte D_m und die mittlere Flußgeschwindigkeit β_m auf, siehe § 1 vorliegender Abhandlung. Mit ihnen und der der charakteristischen Geschwindigkeit

$$B_m = \frac{3}{2} \left(\frac{c\,\nu}{D_m}\right)^{1/3} > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

geht (1) über in $x^3 + p x + q = 0$ mit

$$p = (\pm)\, 2 \frac{\nu}{c} D_m \cdot \beta_m = (\pm)\, 2 \nu^2 \left(\frac{3}{2} \frac{1}{B_m}\right)^3 \beta_m; \qquad q = -2 \frac{\nu^2}{c} D_m = -2 \nu^3 \left(\frac{3}{2} \frac{1}{B_m}\right)^3 \quad . \quad . \quad (3).$$

Was den Einfluß der Dichten und der Flußgeschwindigkeiten auf die Welle anbelangt, so sind nur ihre Mittelwerte D_m bzw. β_m maßgebend. Außerdem spielt eine Rolle eine Geschwindigkeit B_m, die lediglich durch die Kapillarität, die mittlere Dichte und die Wellenform bestimmt ist.

Wir beschäftigen uns mit dem Unterfall permanenter Erregung ($\nu'' = 0$). Dann sind p und q reell. Die Diskriminante hat den Wert

$$\varDelta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 \left\{1 + (\pm)\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^3\right\}.$$

Aus folgenden Wurzelkombinationen, in denen der Einsatz $(\pm)$ keine Rolle spielt, nämlich $x_\alpha\, x_\beta\, x_\gamma = -q > 0 : x_\alpha + x_\beta + x_\gamma = 0$, ergibt sich, daß für $\varDelta > 0$ (1 reelle, 2 konjugiert komplexe Wurzeln liefernd) die reelle Wurzel x_α positiv ist und der reelle Teil von x_β und x_γ negativ, daß für $\varDelta = 0$ (3 reelle Wurzeln liefernd) 1 positiv reelle Wurzel und 2 negativ reelle existieren müssen.

Die Lösung von (3) ist, da $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\nu}{B_m}$,

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= (\eta_1 + \eta_2) \cdot \frac{3}{2}\,\frac{\nu}{B_m}, \\ x_{\beta\,\gamma} &= -\,{}^1\!/_2 \left\{(\eta_1 + \eta_2) \pm i\sqrt[2]{3}\,(\eta_1 - \eta_2)\right\} \cdot \frac{3}{2}\,\frac{\nu}{B_m};\ \text{mit} \\ \eta_1 &= \sqrt[3]{1 + \left|\sqrt[2]{1 + (\pm)\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^3}\right|};\quad \eta_2 = \sqrt[3]{1 - \left|\sqrt[2]{1 + (\pm)\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^3}\right|} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5).$$

Für **sehr kleine** Beträge von $\frac{\beta_m}{B_m}$ wird

$$\eta_1 \simeq \sqrt[3]{2}\left\{1 + (\pm)\frac{1}{12}\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^3\right\};\quad \eta_2 \simeq -(\pm)\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\beta_m}{B_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

so daß für $\beta_m = 0$

$$x_\alpha = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{3}{2}\,\frac{\nu}{B_m};\quad x_{\beta,\gamma} = -\,{}^1\!/_2\left\{1 \pm i\sqrt[2]{3}\right\}\sqrt[3]{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{\nu}{B_m},$$

für sehr große Beträge von $\frac{\beta_m}{B_m}$ wird bei positivem $\varDelta$

$$\eta_1 \simeq \left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^{1/2} \cdot \left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^{3/2}}\right\},\quad \eta_2 \simeq -\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^{1/2} \cdot \left\{1 - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^{3/2}}\right\} \quad . \quad . \quad (7),$$

so daß

$$\eta_1 + \eta_2 \simeq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\beta_m}{B_m}};\quad \eta_1 - \eta_2 \simeq 2\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^{1/2}.$$

Allgemein ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial \beta_m} = (\pm)\,{}^1\!/_2\,\frac{\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^2}{\eta^2\,(\eta^3 - 1)} \cdot \frac{1}{B_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Wir merken an:

$$\sqrt[2]{3} = 1{,}7321;\quad \sqrt[3]{2} = 1{,}2599;\quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{2} + 1} = 1{,}3417;\quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{2} - 1} = 0.7455.$$

Es ist nach (4) $\varDelta = 0$ für $\beta_m = -B_m$ beim Einsatz $(+)$, und für $\beta_m = +B_m$ beim Einsatz $(-)$. Dann ist in beiden Fällen $\eta_1 = \eta_2 = 1$, so daß

$$x_\alpha = 2 \cdot \frac{3}{2}\,\frac{\nu}{B_m};\quad x_\beta = x_\gamma = -1 \cdot \frac{3}{2}\,\frac{\nu}{B_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Es ist nach (4) $\varDelta > 0$, wenn $-1 < (\pm)\frac{\beta_m}{B_m} < +\infty$, so daß für den Einsatz $(+)$ im Intervall $(-B_m < \beta_m < +\infty)$ eine reelle Wurzel $x_\alpha > 0$ auftritt, also eine Grat-Welle; für den Einsatz $(-)$ im Intervall $(-\infty < \beta_m < +B_m)$ zwei konjugiert komplexe Wurzeln x_β und x_γ mit $x_\beta' = x_\gamma' < 0$, also eine Rinne-Welle. Es ist nach (4) $\varDelta < 0$, wenn $-\infty < (\pm)\frac{\beta_m}{B_m} < -1$, so daß für den Einsatz $(+)$ im Intervall $(-\infty < \beta_m < -B_m)$ eine reelle Wurzel $x_\alpha > 0$ auftritt, also eine Grat-Welle; für den Einsatz $(-)$ im Intervall $(+B_m < \beta_m < +\infty)$ zwei reelle Wurzeln x_β und $x_\gamma < 0$, also eine Rinne-Welle. Somit ergibt sich folgendes Schema (siehe Einleitung).

$\Delta = 0$

$x_\alpha > 0$; $(+)$; $\Delta < 0 \rightarrow | \leftarrow \Delta > 0$; $(+)$; $x_\alpha > 0$

Grat-Welle

$\Delta = 0$

$x''_{\beta,\gamma} \mp 0$; $x'_\beta = x'_\gamma < 0$; $(-)$; $\Delta > 0 \rightarrow | \leftarrow \Delta < 0$; $(-)$; $x_\beta < 0$; $x_\gamma < 0$

Rinne-Welle

$- B_m \qquad \rightarrow \beta_m \qquad + B_m$

Tangentialverlöschung $e^{(\mathfrak{w}_t'' \mathfrak{r})}$ kann also in der reinen Kapillarwelle nur auftreten, wenn die Intensität der Welle beiderseits von U weg ansteigt, also in der Rinne-Welle.

Wenn $\Delta < 0$, erscheint die Lösung (5) in imaginärer Form, weil dann η_1 und η_2 imaginär ausfallen. Zwecks Umformung gehen wir aus von der Identität

$$e^\alpha \pm e^\beta = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left\{ e^{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta} \pm e^{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \right\} = 2\, e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \begin{matrix} \cos h \\ \sin h \end{matrix} \left\{ \frac{\alpha - \beta}{2} \right\},$$

so daß

$$a \pm b = 2\,(a\,b)^{1/2} \begin{matrix} \cos h \\ \sin h \end{matrix} \left\{ \log \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2} \right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (10).$$

Damit läßt sich (5) umformen in die 3 reellen Wurzeln

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha &= \sqrt[2]{-(\pm)\frac{\beta_m}{B_m}} \cdot 2 \cos \left\{ {}^1/_3 \operatorname{arctg} \sqrt[2]{-(\pm)\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^3 - 1} \right\} \cdot \frac{3}{2} \frac{\nu}{B_m} \\ x_{\beta,\gamma} &= -\sqrt[2]{-(\pm)\frac{\beta_m}{B_m}} \cdot \left\{ \cos\{\ldots\} \mp \sqrt[2]{3} \sin\{\ldots\} \right\} \cdot \frac{3}{2} \frac{\nu}{B_m} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (5').$$

Im Gebiet $(-\infty < \beta_m < -B_m)$ geht ${}^1/_3 \operatorname{arctg} \sqrt[2]{-(\pm)\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)^3 - 1}$ von $\pi/6 \rightarrow 0$; im Gebiet $(+B_m < \beta_m < +\infty)$ geht dieser Ausdruck von $0 \rightarrow \pi/6$.

Bei der Besprechung und Darstellung der $\mathfrak{w}_t'$- und $\mathfrak{w}_t''$-Kurven setzen wir der Einfachheit halber $3/2 \cdot \nu/B_m = 1$. In den Schaukurven sind immer nur einige ihrer Punkte genau berechnet.

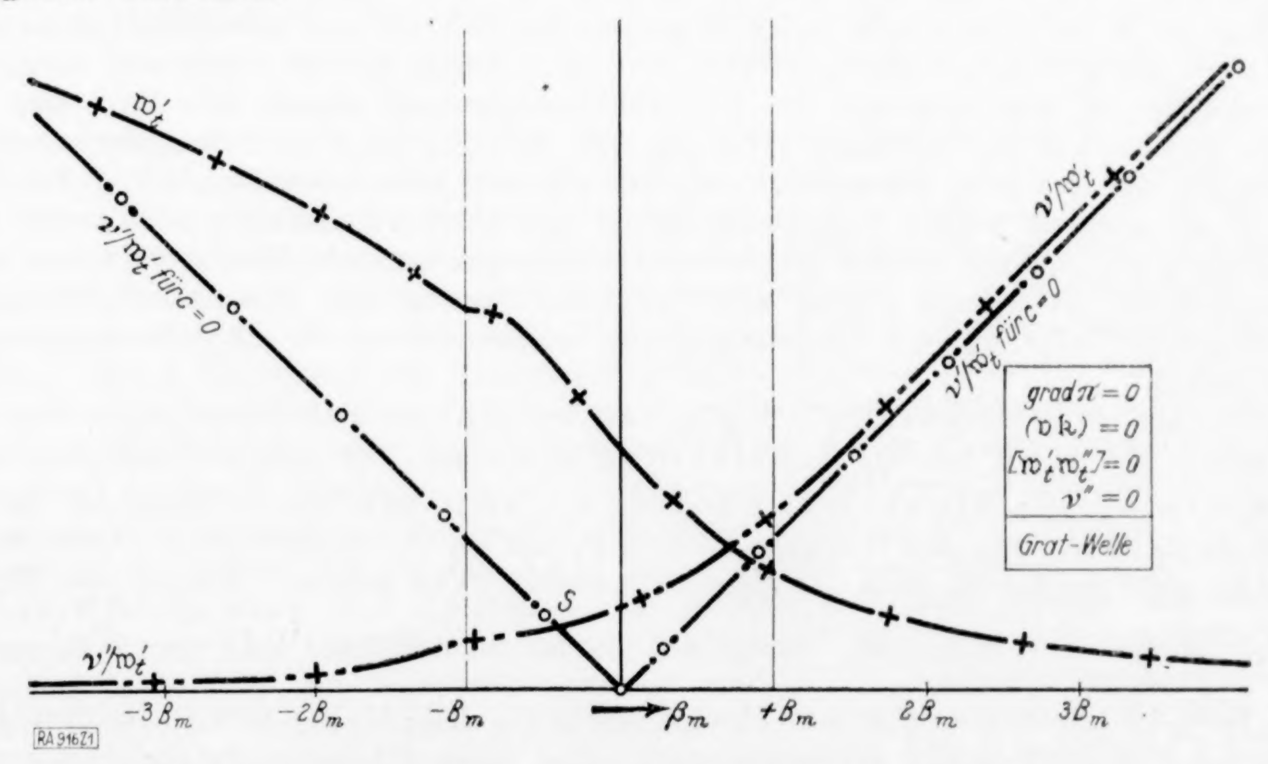


Abb. 1. Reine Kapillar-Wellen im Fließenden; Grat-Profil.

Einsatz (+); Grat-Welle; Abb. 1. Gemäß unserem Schema senkt sich $x_\alpha = |\mathfrak{w}_t'|$ nach (5) und (9) von dem Wert 2 bei $(-B_m)$, wo nach (8) der Anstieg $= 0$ ist, bis auf den Wert $\sqrt[3]{2} = 1{,}26$ bei (0), wo der Anstieg nach (6) $= -1/\sqrt[3]{2} \cdot 1/B_m$ ist. Von hier aus weiter abwärts auf $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = 0{,}596$ bei $(+B_m)$ und weiter auf $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} = 0{,}327$ bei $(+2B_m)$ und allmählich auf den Wert 0 im Unendlichen. Im Gebiet $(-\infty < \beta_m < -B_m)$ ist (5') heranzuziehen. Da hier die trigonometrische Funktion nur zwischen $2\cos\pi/6 = 2\sqrt{3/4} = \sqrt{3} = 1{,}732$ und $2\cos 0 = 2$ schwankt, so verläuft x_α fast proportional zu $\sqrt{-\left(\frac{\beta_m}{B_m}\right)}$, derart, daß von $(-B_m)$ aus x_α unter einem Knick mit abnehmendem β_m allmählich auf $+\infty$ ansteigt, wobei der Grad des Anstieges ständig sinkt bis auf den Wert 0.

Die Kurve der Wellengeschwindigkeit $\frac{\nu'}{\mathfrak{w}_t'} = \frac{\nu'}{x_\alpha}$ ist hiernach leicht zu zeichnen. Von sehr kleinen Werten bei großen negativen β_m steigt die Kurve allmählich an bis zum Werte $B_m/3$ bei $(-B_m)$. Mit einem Knick wachsen dann die Ordinaten auf $1/\sqrt[3]{2} \cdot {}^2/_3\, B_m = 0{,}529\, B_m$ in (0), wo der Anstieg nach (6) $^1/_3$ beträgt, weiter auf $\frac{1}{0{,}596} \cdot {}^2/_3\, B_m = 1{,}119\, B_m$ in $(+B_m)$ und auf $\frac{1}{0{,}327} \cdot {}^2/_3\, B_m = 2{,}04\, B_m$ in $(+2B_m)$ und dann weiter über alle Grenzen, wobei im Unendlichen die Kurve sich der Geraden $y = \beta_m$ anschmiegt, indem dort der Anstieg den Grenzwert 1 annimmt. Diese Gerade sowie die andere $y = -\beta_m$ würden sich als Wellengeschwindigkeiten einstellen, wenn Grenzflächenspannungen nicht vorhanden wären; siehe § 1. Es zeigt sich somit der Einfluß der Grenzflächenspannungen (c) darin, daß sie die Wellengeschwindigkeit $\frac{\nu'}{\mathfrak{w}_t'}$ und die Wellenlänge $\frac{2\pi}{\mathfrak{w}_t'}$ bei positiver mittlerer Flußgeschwindigkeit β_m vergrößern, jenseits einer gewissen negativen aber verkleinern, denn die Gerade $y = -\beta_m$ schneidet die Kurve der Wellengeschwindigkeiten im Gebiete $(-B_m < \beta_m < 0)$. In der Nähe des Schnittpunktes S ist somit c kaum von Einfluß auf Wellengeschwindigkeit und Wellenlänge. Diese Gegend ist deshalb ungeeignet zur Messung der Kapillarkonstante c, aber geeignet zur Messung von Flußgeschwindigkeiten mit Hilfe von Wellen. Ungeeignet für c sind auch große negative Werte von β_m, weil in der Wirklichkeit durch größere Reibung Wirbelung auftritt; das günstigste Gebiet ist das um null.

Die Amplituden, die ja bei ein und demselben Geschwindigkeitspotential ω nach (1'), § 1, proportional zu $\mathfrak{w}_t' = x_\alpha$ sind, sind bei negativem β_m — also wenn die mittlere Flußgeschwindigkeit gegengerichtet ist zur Wellengeschwindigkeit — größer als bei Gleichrichtung. Beim ersten Blick auf eine gewellte Flußoberfläche ist man geneigt, die Amplitudensteigerung gegen den Fluß des Wassers oder des Windes auf die stauende Wirkung der Reibung an U zurückzuführen, dabei von der Wirkung der Schwere absehend. Das ist, wie wir jetzt erkennen, nicht der Fall. Es gehört ja zu unseren ersten Voraussetzungen, daß keinerlei Reibung vorhanden sei. Die Amplitudensteigerung bei relativ großen Geschwindigkeitsunterschieden zwischen mittlerem Fluß und Welle ist primär durch den Vorzeichensprung des Geschwindigkeitspotentials der geführten Welle an der Führungsfläche sowie durch die Druckbedingung an U hervorgerufen.

Mit den Wellengeschwindigkeiten verhält es sich umgekehrt wie mit den Amplituden: sie sind bei Gleichrichtung stets größer als bei Gegenrichtung.

Einsatz (—); Rinne-Welle; Abb. 2. Nach unserem Schema ist im Gebiete $(-\infty < \beta_m < +B_m)$ für die Wurzeln x_β und x_γ die Gl. (5) maßgebend. Wenn der Betrag von β_m/B_m sehr groß, ist nach (7) $x'_{\beta,\gamma}$ sehr klein. Von kleinen Werten im Negativ-unendlichen steigt also $|x'_\beta| = |x'_\gamma|$ stetig an bis zu dem Werte $^1/_2\,\{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\} = 0{,}163$ in $(-2B_m)$; $^1/_2\,\{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\} = 0{,}298$ in $(-B_m)$; $^1/_2\,\sqrt[3]{2} = 0{,}63$ in (0) und schließlich bis zum Wert 1 in $(+B_m)$, wo der Anstieg nach (8) auf null zurückgegangen ist. In diesem Gebiet gibt es auch ein $|x''| = |\mathfrak{w}_t''|$. Von nach (7) sehr großen Werten im

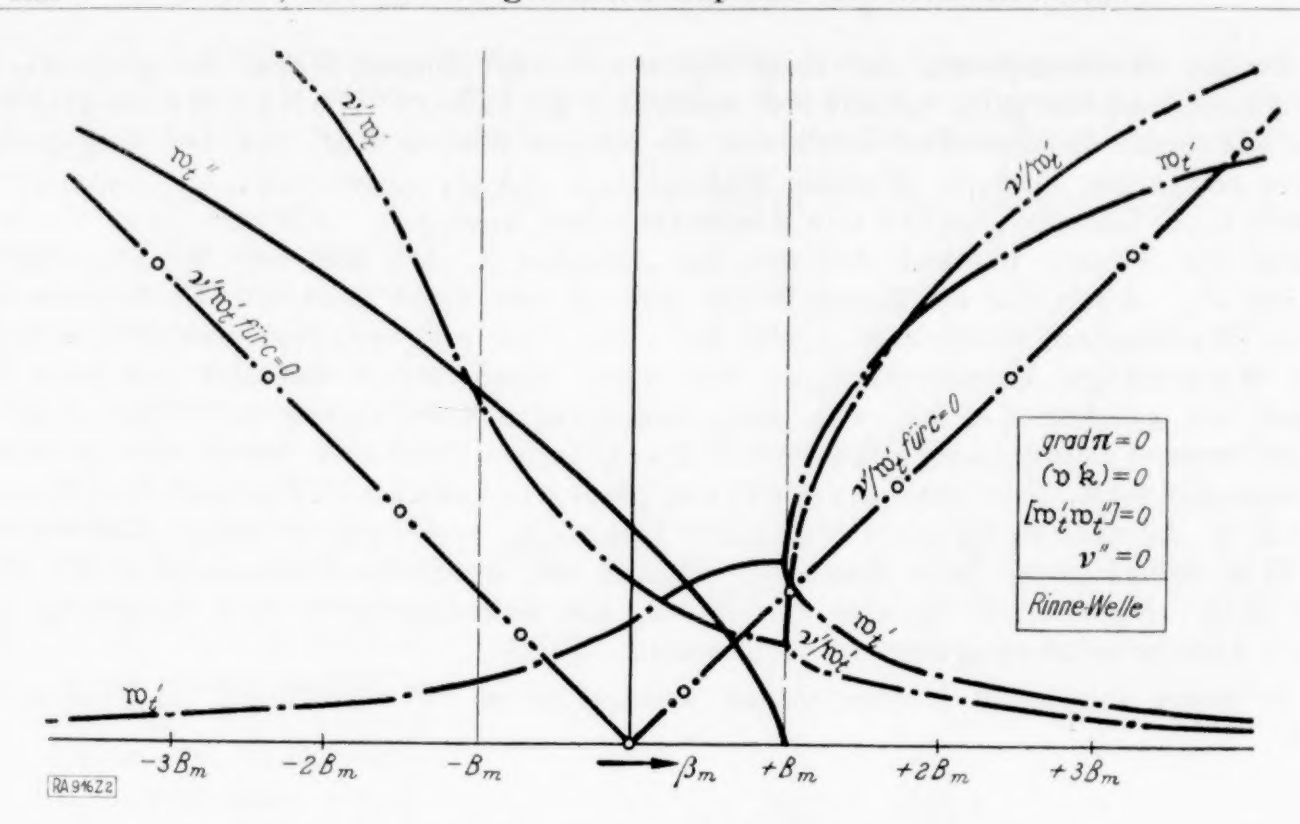


Abb. 2. Reine Kapillar-Wellen im Fließenden; Rinne-Profil.

Negativ-unendlichen mit verschwindendem Anstieg fällt x'' fast parabolisch ab auf die Werte $\pm {}^1/_2 \sqrt[2]{3}\,\{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\} = \pm\, 2{,}463$ in $(-\,2\,B_m)$; $\pm {}^1/_2 \sqrt[2]{3}\,\{\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}+1}+\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}-1}\}$ $= \pm\, 1{,}806$ in $(-\,B_m)$; $\pm {}^1/_2 \sqrt[2]{3}\,\sqrt[3]{2} = \pm\, 1{,}09$ in (0) und schließlich auf 0, in $(+\,B_m)$, wo nach (8) $\partial\,(y_1 - y_2)/\partial\,\beta_m = \infty$ ist.

Die Geschwindigkeitskurve verläuft reziprok zu $x'_{\beta,\gamma}$. Im Negativ-unendlichen ist $\nu'/\mathfrak{w}_t'$ sehr groß und fast linear und parallel zur Abszissenachse. In $(-\,2\,B_m)$ ist $\nu'/\mathfrak{w}_t'$ $= \frac{1}{0{,}163}\cdot\frac{2}{3}\,B_m = 4{,}09\,B_m$; in $(-\,B_m)$: $\frac{1}{0{,}298}\cdot\frac{2}{3}\,B_m = 2{,}237\,B_m$; in (0): $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{2}{3}\,B_m = 1{,}059\,B_m$ und in $(+\,B_m)$ gleich ${}^2/_3\,B_m$, wo der Anstieg wieder auf null zurückgegangen ist. Im Gebiet $(+\,B_m < \beta_m < +\,\infty)$ ist für die Wurzeln x_β und x_γ die Darstellung (5′) heranzuziehen. Die geschweifte Klammer läuft dabei von $\cos 0 \mp \sqrt[2]{3}\,\sin 0 = 1$ bis $\cos \pi/6$ $\mp \sqrt[2]{3}\,\sin \pi/6 = \sqrt[2]{{}^3/_4} \mp \sqrt[2]{{}^3/_4} = 0$ bzw. $\sqrt[2]{3} = 1{,}732$. Von den beiden Wurzeln sinkt also x_β von 1 aus fast ganz parabolisch auf 0 herab, während x_γ von 1 aus fast parabolisch dem Unendlichen zustrebt. Der Anstieg für beide Aeste ist nach (8) in $(+\,B_m)$ unendlich groß und im Unendlichen unendlich klein. In $(+\,3\,B_m)$ hat x_β den Wert 0,22 und $x_\gamma = 2{,}86$.

Zeichnen wir damit die Geschwindigkeitskurven $\nu'/\mathfrak{w}'_t$ ein. In $(+\,B_m)$, wo die Geschwindigkeit ${}^2/_3\cdot B_m$, steigt der eine Ast jäh an, derart, daß in $(+\,3\,B_m)$ sie den Wert $2{,}97\,B_m$ hat, während der andere absinkt, derart, daß in $(+\,3\,B_m)$ der Wert 0,24 B_m herrscht. Das Kurvenbild 2 der Rinne-Welle ist von dem der Grat-Welle, Kurvenbild 1, völlig verschieden. Zunächst fällt auf, daß trotz Energieerhaltung Tangentialverlöschung $e^{(\mathfrak{w}''_t\, \mathfrak{r})}$ auftreten kann, womit Normalkomponenten der Phasennormale $\mathfrak{w}'$ in beiden Mitteln verbunden sind, ein neuer Fall, der zeigt, daß diese geführten Wellen wirklich nicht durch Standwechsel dargestellt werden können. Ferner sind bei positiven mittleren Flußgeschwindigkeiten $\beta_m > B_m$ zwei verschiedene Aeste der Amplituden, Wellenlängen und Wellengeschwindigkeiten möglich. Den Ast größerer Amplitude und dementsprechend kleinerer Wellenlänge und Wellengeschwindigkeit wollen wir labil nennen. Denn da die mit der geführten Welle verbundene Gleitung an U nach § 4 durch $2\,\omega\,\mathfrak{w}_t$ bestimmt ist, so haben wir in der Natur bei größerer Amplitude auch die größere Neigung zur Wirbelbildung und Auflösung der glatten U-Fläche infolge von Reibung. — Bei Gegenrichtung von mittlerem Fluß und Welle sind im Gegensatz zur Grat-Welle die Amplituden klein und die Geschwindigkeiten groß. Die stärksten Aenderungen liegen jetzt bei $(\pm\,B_m)$. — Zeichnen wir noch die beiden Geraden $y = \pm\,\beta_m$ ein, die für $c = 0$ die Wellengeschwindigkeiten liefern. Die eine schneidet etwas unterhalb $(+\,B_m)$ sowie den labilen Ast zweimal, nämlich etwas über $(+\,B_m)$ und $(3\,B_m)$; die andere Gerade schneidet weit hinter $(-\,B_m)$.

Beiden Wellenformen, der Grat-Welle und der Rinnen-Welle, ist gemeinsam, daß es keine Grenzen gibt, jenseits welchen geführte Wellen unmöglich sind. Suchen wir noch in den Kurvenbildern diejenigen Stellen auf, die bei entgegengesetzt gleichem mittlerem Fluß β_m gleiche Wellenlänge $2\pi/\mathfrak{w}'_t$ aufweisen; wir bekommen sie, wenn wir eine Gerade parallel zur Abszissenachse bewegen. Für die Grat-Welle findet sich nur ein Punkt, nämlich der mit der Abszisse $\beta_m = 0$ und der Wellengeschwindigkeit $0{,}529\ B_m$. Auch für die Rinne-Welle gibt es nur den Punkt mit der Abszisse $\beta_m = 0$ und der Wellengeschwindigkeit $1{,}059\ B_m$. Da nun entgegengesetzter Wellenlauf und gleiche Wellenlänge Voraussetzungen für einen »stehenden« Zustand geführter Wellen sind und ein solcher das ist, was man ausgeprägte Schwingung bzw. Resonanz nennt, so besagt unsere Feststellung, daß reine Kapillarwellen nur bei Flüssigkeitsruhe Schwingung bzw. Resonanz an einem geschlossenen Flüssigkeitskörper von passenden Abmessungen erzeugen können, wohingegen ohne Kapillarität bei jedem Fluß Schwingung bzw. Resonanz möglich ist, wenn die Abmessungen der U-Fläche danach sind. Kapillarität ist also ein Mittel, um Schwingungen bzw. Resonanz an Körpern mit Flüssigkeitsbewegung zu erschweren.

In einer folgenden Untersuchung werden reine Schwerewellen im Fließenden behandelt. 916

Graphische Kinematik des Taumelscheibentriebes.

Von **KARL FEDERHOFER** in Graz.

Die sehr mühsamen Berechnungen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen beim Taumelscheibentriebe werden im folgenden ersetzt durch einfache zeichnerische Verfahren, die sich aus den neuen Abbildungsmethoden von Mayor und v. Mises entwickeln lassen.

1. Der Taumelscheibentrieb besteht aus einer kreisrunden ebenen Scheibe S (Abb. 1), die sich um die Normale N im Mittelpunkte O drehen kann, während gleichzeitig die Achse N zur Drehung um die Welle MM_1 gezwungen wird. Wenn nun ein beliebiger Randpunkt B der Scheibe durch einen Lenker an das Kugelgelenk O_1 angeschlossen wird, so daß er sich in einem Kreise bewegt, dessen Ebene senkrecht steht auf O_1O, so hat die Scheibe S nur mehr einen Freiheitsgrad der Bewegung, sie führt eine zwangläufige sphärische Bewegung — eine taumelnde Bewegung — um den festen Punkt O aus.

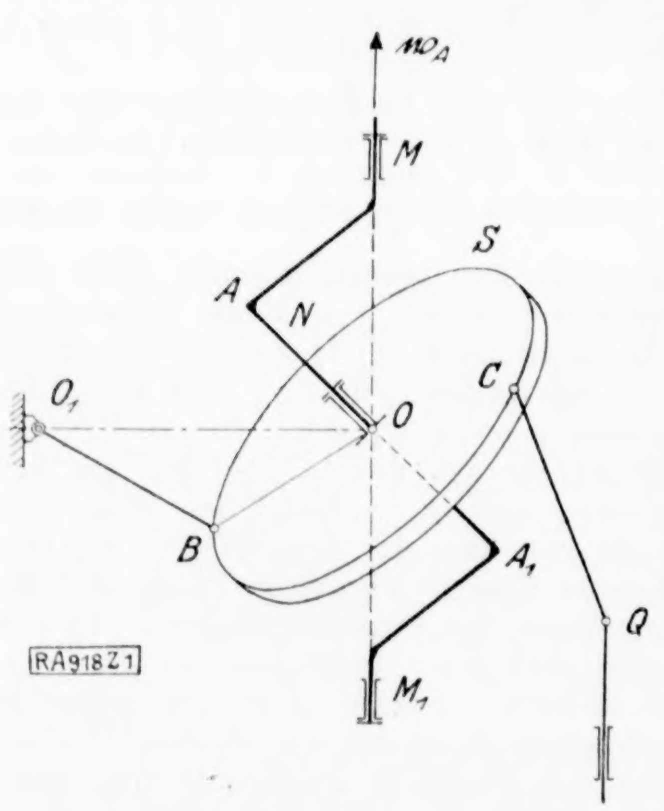


Abb. 1.

Zwingt man den Punkt B durch eine Schlittenführung oder durch eine Kardanaufhängung der Scheibe zur Bewegung in einem durch die Achse MM_1 gelegten Hauptkreise jener Kugelfläche mit dem Mittelpunkte O, deren Halbmesser gleich dem der Scheibe ist, dann ergibt sich die meist gebräuchliche Anordnung des Taumelscheibentriebes, der dazu dient, die rotierende Bewegung um die Achse MM_1 in die hin- und hergehende Bewegung der Kolben einer Gruppe von Zylindern umzuwandeln, die symmetrisch im Kreise um die Achse MM_1 angeordnet sind und deren Achsen parallel zu MM_1 laufen.

Die Pleuelstangen sind an die Taumelscheibe in Kugelgelenken angeschlossen, sie führen räumliche Bewegungen aus; nur jene Pleuelstangen, die in den im Hauptkreise geführten Scheibenpunkten angelenkt sind, machen ebene Bewegungen.

Es handelt sich darum, aus dem konstant angenommenen Drehvektor $\mathfrak{w}_A$ der Kurbel AM den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der Taumelscheibe zu ermitteln, womit die kinematischen Verhältnisse der Pleuelstangen festgelegt werden können.

Da das Getriebe zwangläufig ist, so genügt eine Koordinate zur Angabe seiner jeweiligen Stellung; als solche wird zweckmäßig der Winkel φ gewählt (Abb. 2), den die Kurbel AO_2 mit der YZ-Ebene einschließt, in der ein Scheibendurchmesser BB_1 geführt wird, so daß $\omega_A = \frac{d\varphi}{dt}$. Dann lassen sich in bezug auf das Achsenkreuz XYZ mit dem Ursprunge O die Koordinaten der am Rande der Scheibe angeordneten Kugelgelenke durch den Winkel φ und durch die gegebenen Abmessungen des Getriebes ausdrücken; die Ableitung der Koordinaten nach der Zeit liefert die Komponenten der Geschwindigkeiten in den Achsrichtungen, eine nochmalige Ableitung jene der Beschleunigungen. Eine solche Rechnung wird schon für jene Gelenkpunkte, die in den Endpunkten des zu BB_1 senkrechten Durchmessers CC_1 liegen, außerordentlich umständlich, wie aus einer Untersuchung [1]) des Herrn Dr.-Ing. Stein hervorgeht, wo die Koordinaten des Punktes C mit

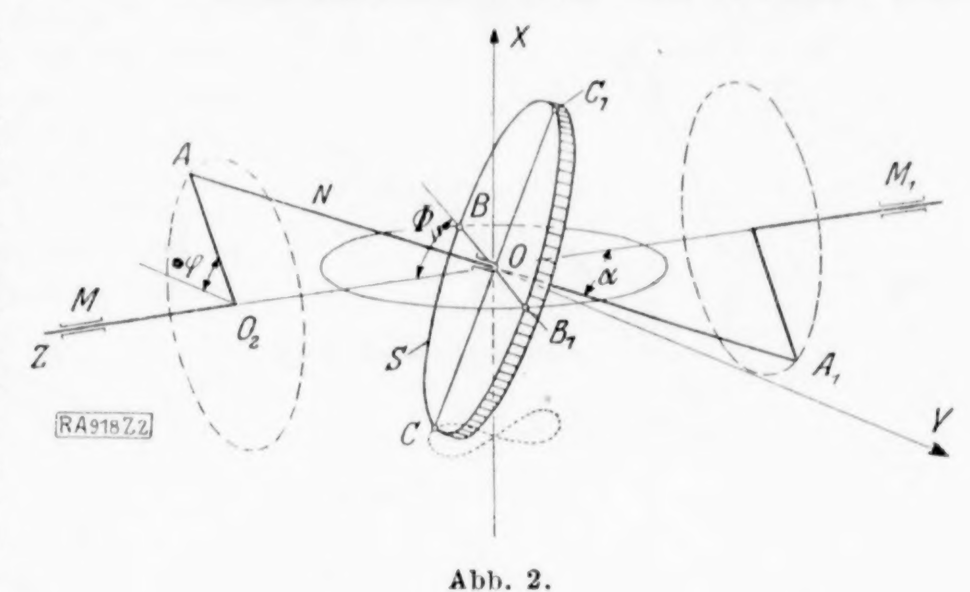


Abb. 2.

$$x_c = -c\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi},$$

$$y_c = -c\sin^2\alpha \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}, \qquad z_c = +c\sin\alpha\cos\alpha \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}$$

angegeben wurden ($c = OB = OC$; $\alpha = \sphericalangle AOZ$).

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die oben umschriebenen Aufgaben in weitaus einfacherer und übersichtlicherer Weise gelöst werden können, wenn man sich dabei der von Mayor [2]) und v. Mises [3]) stammenden Abbildungsverfahren bedient, deren besondere Eignung für kinematische Untersuchungen räumlicher Systeme in meiner kürzlich erschienenen »Graphischen Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems« [4]) gezeigt wurde.

Da ich dort die Kinematik der Taumelscheibe nur ganz knapp behandelt habe, so dürfte es bei dem gegenwärtig zu beobachtenden Interesse für räumliche Getriebe gerechtfertigt sein, der graphischen Kinematik der Taumelscheibe eine etwas ausführlichere Studie zu widmen. Dabei muß freilich, um nicht weitschweifig zu werden, auf eine Begründung des Abbildungsverfahrens und auf eine Besprechung seiner Eigenschaften verzichtet werden; es mögen die folgenden Bemerkungen hierüber zur Orientierung genügen.

2. Mayor ordnet in seinem **Abbildungsverfahren** den Vektoren des Raumes die Kräfte in einer Ebene — der Abbildungsebene — ein-eindeutig zu, so zwar, daß die Projektion des Raumvektors auf die Abbildungsebene die Größe und Richtung der abgebildeten Kraft angibt, während deren Lage in der Abbildungsebene durch die zur Abbildungsebene senkrechte Komponente des Raumvektors bestimmt wird, indem diese, multipliziert mit einer beliebigen positiven Abbildungskonstanten c, das Moment der abgebildeten Kraft bezüglich des Koordinatenursprunges der Größe und dem Drehsinne nach liefert.

Auf Grund dieser Festlegungen wird das Bild P eines Vektors $\mathfrak{P}$, dessen Grund- und Aufriß gezeichnet ist (Abb. 3), am einfachsten wie folgt konstruiert: Man zieht durch den in der Entfernung c von O auf der X-Achse gelegenen Punkt f eine Parallele zum Aufrisse bis zum Schnitte T mit der Y-Achse; dann ist die durch T gezogene Parallele zu P' das gewünschte Bild P des Vektors. Der Summe von im gleichen Punkte an-

[1]) V. D. I. 1928, Heft 14.
[2]) Statique graphique des systèmes de l'espace, Lausanne et Paris 1910.
[3]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1916 (Bd. 64).
[4]) Verlag J. Springer, Wien 1928.

gesetzten Raumvektoren entspricht bei dieser Abbildungsmethode die Summe der zugehörigen Bilder, sie ist mit Hilfe eines Kräfte- und Seilpolygons zu zeichnen.

Parallele Raumvektoren werden durch dasselbe Bild abgebildet, den Vektoren, die einer Ebene parallel sind, entsprechen Bilder,

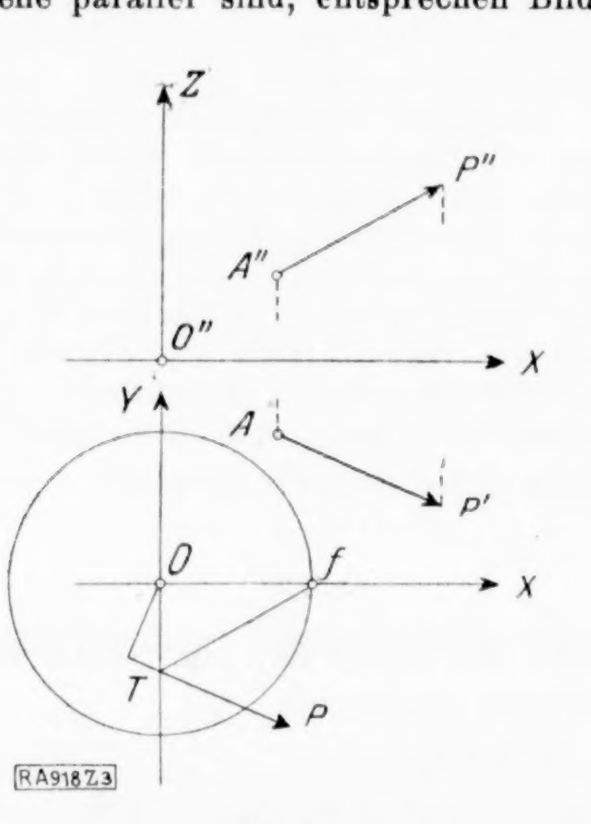


Abb. 3.

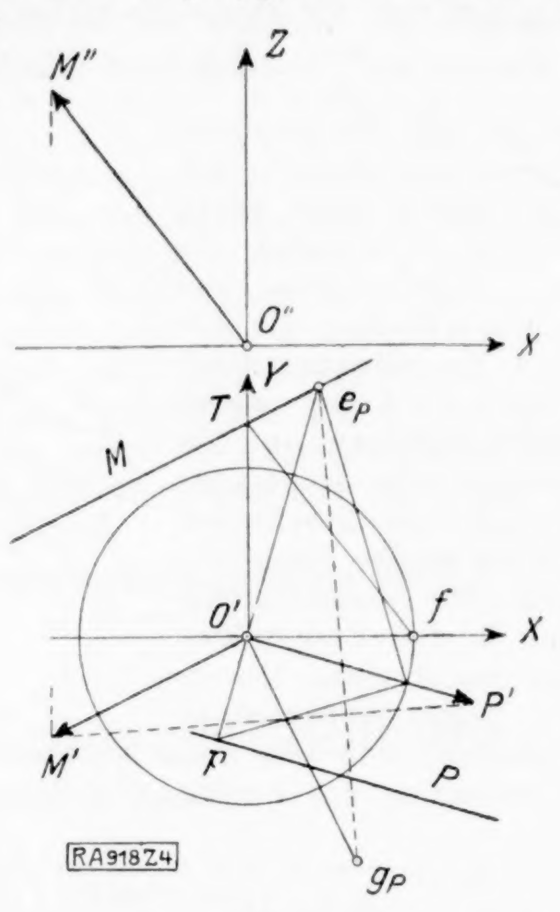


Abb. 4.

die sich in einem Punkte, dem Abbildungspunkte der Ebene, schneiden.

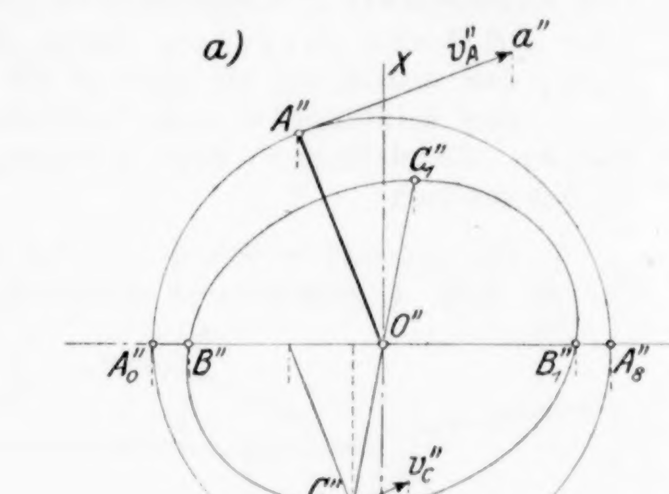
v. Mises hat eine einfache Konstruktion für das Bild des Momentenvektors $\mathfrak{M}$ der Kraft $\mathfrak{P}$ in bezug auf den Ursprung O angegeben. In Abb. 4 bedeutet g_P den Spurpunkt von $\mathfrak{P}$ in der Bildebene, P das Bild des Raumvektors. Konstruiert man den Antipol e_P von P bezüglich des Abbildungskreises vom Halbmesser $c\,(\overline{O'p}\cdot\overline{O'e_P} = c^2)$, zieht in O' eine Senkrechte zu $O'g_P$ und bringt diese zum Schnitte mit der Normalen durch P' zu $g_P e_P$, so liefert $O'M'$ die Länge des gesuchten Bildes M, des Momentenvektors M. Das Bild M geht durch den Antipol e_P, denn es gilt für zwei zueinander senkrechte Vektoren des Raumes die Beziehung, daß das Bild des einen Vektors durch den Antipol des Bildes des anderen führen muß. Der Aufriß $O''M''$ ist nach dem früheren wieder parallel zu fT. Bedeutet $\mathfrak{p}$ den Ortsvektor eines Punktes der Wirkungslinie von $\mathfrak{P}$ bezüglich O, dann ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{P}$ ($\times$ äußeres Vektorprodukt). Durch die angegebene Konstruktion ist daher die Darstellung eines Vektorproduktes auf eine sehr einfache Form gebracht.

Das Bild des Momentes eines Vektors $\mathfrak{H}$ für einen beliebigen Drehpunkt A (Abb. 5) kann nach folgendem Verfahren konstruiert werden: Bestimme den Spurpunkt g_H von $\mathfrak{H}$ und jenen g_A der durch A zu $\mathfrak{H}$ gezogenen Parallelen, ziehe $O'm_1 \perp O'g_H$, $H'm_1 \perp e_H g_H$, $O'M' \perp g_A g_H$ und $m_1 M' \perp O'g_A$; dann ist $O'M'$ die gesuchte Länge des Bildes M, das durch den Antipol e_H zu legen ist.

3. Geschwindigkeitszustand der Taumelscheibe. Die Abb. 2 gibt ein axonometrisches Bild des zu untersuchenden Getriebes. Der Durchmesser BB_1 der Scheibe S sei in der YZ-Ebene durch einen Schlitten geführt, die Normale N der Scheibe wird durch die Kurbel AO_2 in einem Kreiskegel vom Oeffnungswinkel 2α um die Z-Achse gedreht. Aus der gegebenen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_A$ des Punktes A der Normalen N sollen zunächst die Geschwindigkeiten der Endpunkte der zueinander senkrechten Scheibendurchmesser BB_1 und CC_1 graphisch ermittelt werden.

Aufriß und Grundriß dieses Getriebes sind in Abb. 6 dargestellt, wo die YZ-Ebene als Grundrißebene gewählt ist. Um die zur beliebigen Lage des Durchmessers BB_1 gehörige Lage des normalen Durchmessers CC_1 zu finden, zeichnet man die Umlegung $O[A]$ von OA und erhält in der hiezu errichteten Normalen $O[C]$ die Umlegung von OC, woraus Grund- und Aufriß $C'\,C''$ des Punktes C bestimmt sind, dessen Bahnkurve im Auf- und Grundriß eingezeichnet worden ist.

Da die Scheibe eine sphärische Bewegung um O macht, so steht der Drehvektor $\mathfrak{w}$ dieser Bewegung senkrecht auf den Geschwindigkeiten aller Systempunkte. Konstruiert man die Bilder der Geschwindigkeiten der Systempunkte A und B und deren Antipole[1]), so ist demnach das Bild ω des Drehvektors durch die Verbindungslinie dieser Antipole gegeben. Hiebei ist das Bild v_A durch $T_A \parallel v_A'$ zu ziehen, wo $f\,T_A \parallel v_A''$, und es ist der Antipol e_A durch $f\,e_A \parallel O''A''$ bestimmt, während das Bild v_B durch O' geht, so daß dessen Antipol in der Richtung $B'B_1'$ unendlich fern liegt. Somit ist das Bild ω durch die im Punkte e_A gezogene Parallele zu $B'B_1'$ bestimmt und es ist $\omega' \parallel \omega$, $\omega'' \parallel O''A''$. Der Antipol e_ω von ω,



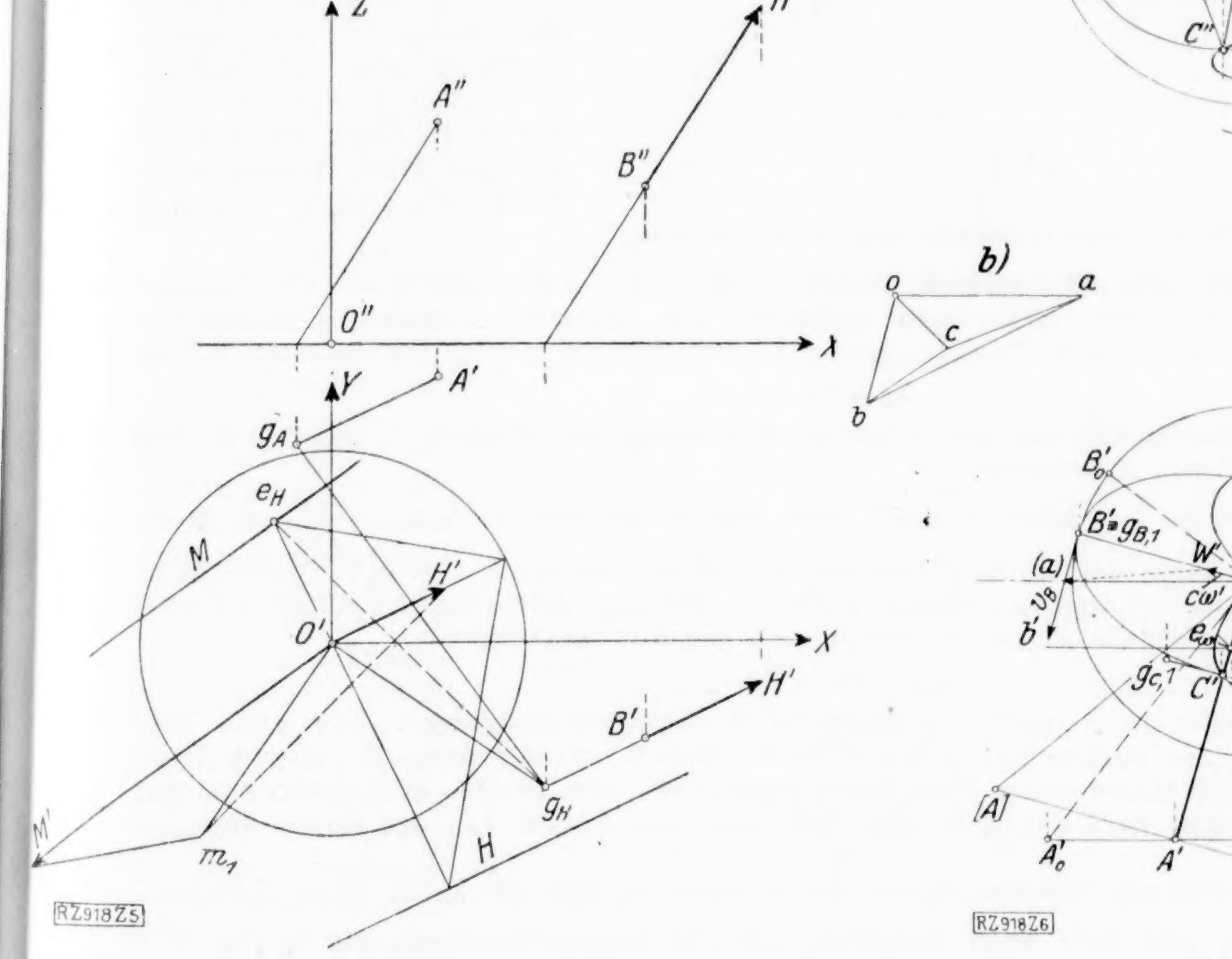


Abb. 5.

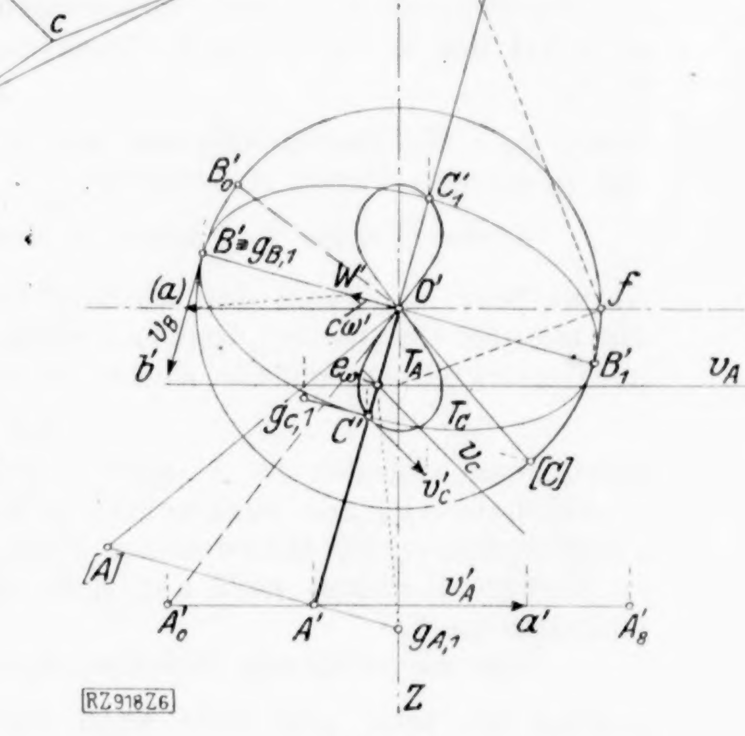


Abb. 6.

durch den die Bilder der Geschwindigkeiten aller Systempunkte gehen, liegt im Schnitte von $O'A'$ mit v_A, da $\mathfrak{v}_A \perp \mathfrak{w}$.

Die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{BA}$ des Punktes B gegen den festgehaltenen Punkt A steht senkrecht auf der durch $B\,A$ gelegten Parallelebene zu $\mathfrak{w}$, daher steht ihr Bild senkrecht auf der Spur dieser Ebene, die als Verbindung der Spurpunkte $g_{A1}\;g_{B1}$ der durch A und B gelegten Parallelen zu $\mathfrak{w}$ gewonnen wird.

Zufolge der Gleichung

$$\mathfrak{v}_B = \mathfrak{v}_A + \mathfrak{v}_{BA}$$

hat man in einem Geschwindigkeitsplane die Bildlänge $o\,a = v_A'$ (Abb. 6 b) aufzutragen und durch o die Parallele zu v_B', durch a jene zu v_{BA}' zu ziehen; sie schneiden sich im Geschwindigkeitspunkte b, so daß $o\,b$ bereits die gesuchte Bildlänge der Geschwindigkeit des Punktes B liefert.

[1]) Als Abbildungskonstante c wurde der Halbmesser der Taumelscheibe gewählt.

Da nun der Satz[1]) besteht: »Die Figur der Geschwindigkeitspunkte $a, b, c \ldots$ (Geschwindigkeitsplan) ist ähnlich zu der den Systempunkten $A, B, C \ldots$ entsprechenden Figur der Spurpunkte $g_{A1}\, g_{B1}\, g_{C1} \ldots$ und gegenüber dieser um 90^0 gedreht«, so ist der dem Systempunkt C entsprechende Geschwindigkeitspunkt c aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und $g_{A1}\, g_{B1}\, g_{C1}$ leicht zu finden. Das Bild v_C ist durch e_ω parallel oc zu legen, der Aufriß v_C'' ist parallel zu $f\,T_C$.

Die Bildlänge ω des Drehvektors $\mathfrak{w}$ ergibt sich aus der bekannten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_A$. Bezeichnet $\mathfrak{r}_A$ den Ortsvektor von A bezüglich des Koordinatenursprunges O, so ist bekanntlich

$$\mathfrak{v}_A = \mathfrak{w} \times \mathfrak{r}_A .$$

Da das Bild ω schon bekannt ist, so ist dessen Länge $c\,\omega' = \overline{O\,W'}$ durch Umkehrung der in Abb. 4 gezeigten Konstruktion leicht zu finden; man macht $O'(a) = -v_A'$ und zieht $(a)\,W' \perp g_{A1}\, e_\omega$.

Für die Ermittlung der Geschwindigkeiten der Systempunkte ist aber die Kenntnis des Bildes ω und dessen Bildlänge nicht erforderlich.

In Abb. 7 sind die einem halben Umlaufe des Punktes A zugehörigen Geschwindigkeiten der Punkte B und C auf der abgewickelten Halbkreisbahn von A aufgetragen.

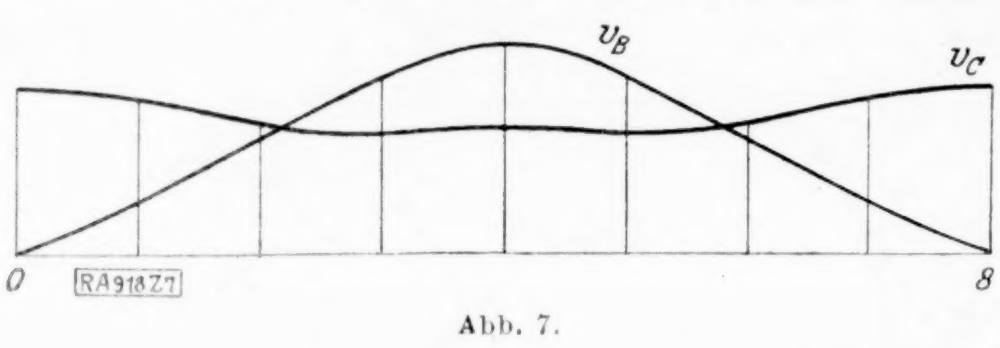


Abb. 7.

4. Beschleunigungszustand. Dieser ist durch den Drehvektor $\mathfrak{w}$ und den Vektor $\mathfrak{l}$ der Winkelbeschleunigung vollkommen bestimmt. Um letzteren zu finden, ermitteln wir zunächst aus der gegebenen Beschleunigung $\mathfrak{b}_A$ des Punktes A jene des Punktes B ($\mathfrak{b}_B$). Es ist

$$\mathfrak{b}_B = \mathfrak{b}_A + \mathfrak{b}_{BA},$$

worin $\mathfrak{b}_{BA}$ die Beschleunigung der relativen Bewegung des Punktes B gegenüber dem fest gedachten Punkt A bedeutet.

Dieser Vektor $\mathfrak{b}_{BA}$ kann in zwei Teile zerlegt werden: in $b_{BA,1} = \frac{v_{BA}^2}{n_{BA}}$, d. i. die Normalbeschleunigung der relativen Drehung von B um eine durch A gelegte Drehachse $\mathfrak{w}$, die mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{BA}$ erfolgt, wobei die Bildlänge dieser Geschwindigkeit bereits im Geschwindigkeitsplane durch die Strecke ab gegeben ist, und in

$$\mathfrak{b}_{BA,2} = \mathfrak{l} \times (\mathfrak{r}_B - \mathfrak{r}_A),$$

herrührend von der im Punkte A angesetzten Winkelbeschleunigung $\mathfrak{l}$. Der erste Teil, in welchem n_{BA} den senkrechten Abstand des Punktes B von der durch A gelegten Drehachse bedeutet, ist ohneweiteres konstruktiv zugänglich, vom zweiten Teil wissen wir, daß er senkrecht stehen muß auf AB, sein Bild also den Antipol e_{AB} des Bildes von AB enthalten muß.

Die zu suchende Beschleunigung des Punktes B, der mit $\mathfrak{v}_B$ in einer Kreisbahn geführt ist, setzt sich aber auch zusammen aus der Normalbeschleunigung $b_{B,1} = \frac{v_B^2}{B'\,O}$, die leicht zu konstruieren ist, und aus der Tangentialbeschleunigung $b_{B,2}$, deren Bild mit jenem von $\mathfrak{v}_B$ zusammenfällt.

Es ist mithin

$$\mathfrak{b}_B = \mathfrak{b}_{B,1} + \mathfrak{b}_{B,2} = \mathfrak{b}_A + \mathfrak{b}_{BA,1} + \mathfrak{b}_{BA,2} .$$

Fassen wir in dieser Gleichung den gegebenen Vektor $\mathfrak{b}_A$ und die Normalbeschleunigungen, die nach dem noch zu beschreibenden Verfahren zu konstruieren sind, zu einem Vektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{b}_A + \mathfrak{b}_{BA,1} - \mathfrak{b}_{B,1}$$

zusammen, so daß nun

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{b}_{B,2} - \mathfrak{b}_{BA,2}$$

wird, so ist die hiernach verlangte Zerlegung von $\mathfrak{r}$ unschwer zu bewirken, da das Bild von $\mathfrak{b}_{B,2}$ bekannt ist und jenes von $\mathfrak{b}_{BA,2}$ durch den Antipol e_{AB} gehen muß und alle drei Bilder sich in einem Punkte schneiden müssen. Durch Zusammenfassung von $b_{B,1}$ und $b_{B,2}$ in einem Beschleunigungsplane wird endlich die Bildlänge b_B gewonnen. Die nach dem entwickelten Gedankengange notwendigen Konstruktionen sind in Abb. 8 aus-

[1]) Der Satz ist in meiner auf Seite 313 erwähnten Schrift (Abschn. II, 11) bewiesen.

geführt, zu deren Erläuterung folgendes bemerkt sei: Die Abbildungskonstante c wurde gleich gesetzt dem Halbmesser $B\,O$ des Führungskreises von B. Die Geschwindigkeit des Punktes A ist konstant und gleich $O\,A$ angenommen, so daß die Beschleunigung $\mathfrak{b}_A$ als reine Normalbeschleunigung durch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{A\,O_2}$ gegeben ist.

Die Normalbeschleunigung

$$b_{BA,1} = \frac{v_{BA}^2}{n_{BA}}$$

fällt in das Lot aus B auf die in A angesetzte Drehachse $\mathfrak{w}$; demnach steht sie senkrecht auf $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}_{BA}$ und es ist ihr Bild durch die Verbindung des Antipoles e_ω mit dem Antipole e^{BA} des Bildes v_{BA} gegeben.

Da $\mathfrak{v}_{BA} \perp \mathfrak{w}$, so liegt der Antipol e^{BA} auf ω; man erhält ihn daher, ohne das Bild v_{BA} zeichnen zu müssen, im Schnitte von ω mit der in O' errichteten Normalen zur Strecke ab im Geschwindigkeitsplane, die ja parallel ist zu v_{BA}. Die Parallele zu ω' durch A' schneidet die Parallele durch B' zum Bilde $b_{BA,1}$ in einem Punkte D'; mit $B'D'$ ist bereits der Grundriß des Lotes $n_{BA} = B\,D$ bestimmt.

Tragen wir nun im Punkte B die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{BA}$ auf, so daß

$$\overrightarrow{B\,E} = \mathfrak{v}_{BA},$$

Abb. 8.

und errichten in der Ebene $D\,B\,E$ im Punkte E die Normale auf $E\,D$, so schneidet diese die Gerade $B\,D$ in einem Punkte F, für welchen $\overline{F\,B} = \frac{v_{BA}^2}{n_{BA}} = b_{BA,1}$.

Die Konstruktion der Bildlänge $b_{BA,1}$ gestaltet sich hiernach ganz einfach: Man zieht zu $D'E'$ die Parallele durch e_ω, diese ergibt das Bild von DE (denn DE liegt in der Ebene DBE, deren Bildpunkt e_ω ist); bestimmt man weiter den auf dem Bilde ω liegenden Antipol e_{DE} als Schnitt der Normalen durch O' zu $D'E'$ mit ω und verbindet e_{DE} mit e_ω, so erhält man das Bild EF; die Parallele hierzu durch E' führt zum gesuchten Punkt F' auf $B'D'$.

Um $\mathfrak{b}_{B,1}$ zu konstruieren, verbinden wir den Endpunkt b' der im Punkte B angesetzten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_B$ mit O' und errichten darauf die Senkrechte bis zum Schnitte G' mit $B'O'$; dann ist $\overline{G'B'} = \frac{v_B^2}{B'\,O'} = b_{B,1}$, das Bild geht durch O', da diese Normalbeschleunigung in der Bildebene liegt.

Die Zusammensetzung der drei Vektoren $\mathfrak{b}_A$, $\mathfrak{b}_{BA,1}$ und $-\mathfrak{b}_{B,1}$ mit Hilfe eines Kraft- und Seileckes liefert den Hilfsvektor $\mathfrak{r}$ (Pol des Krafteckes ist p, Abb. 8 b).

Da durch den Schnittpunkt s der Bilder r und $b_{B,2}$ und durch den Antipol e_{AB} das Bild von $\mathfrak{b}_{BA,2}$ gehen muß, so sind damit im Beschleunigungsplane die Teile $b_{B,2}$ und $b_{BA,2}$ bestimmt. Die Zusammensetzung von $b_{B,1}$ und $b_{B,2}$ liefert nun die Länge des Bildes b_B, das durch den Punkt O' zu legen ist.

Der Vektor $\mathfrak{l}$ der Winkelbeschleunigung ergibt sich aus folgender Betrachtung: Da der Beschleunigungspol π einer sphärischen Bewegung in den festen Drehpunkt O fällt, so ist

$$\mathfrak{b}_A = \mathfrak{b}_{A\pi,1} + \mathfrak{b}_{A\pi,2}\,,$$

worin $b_{A\pi,1} = \frac{v_A^2}{n_{A\pi}}$ die Normalbeschleunigung der Drehung des Punktes A um die durch $\pi \equiv O$ gelegte momentane Drehachse $\mathfrak{w}$ ist mit $n_{A\pi}$ als kürzestem Abstand des Punktes A von dieser, während $\mathfrak{b}_{A\pi,2} = \mathfrak{l} \times \mathfrak{r}_A$.

Die Normalbeschleunigung steht senkrecht auf $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}_A$, ihr Bild ist daher die Gerade $e_\omega e_A$; zieht man durch A' die Parallele zu diesem Bilde bis zum Schnitte K' mit ω', so ist $A'K'$ der Grundriß des Lotes $n_{A\pi}$. Tragen wir vom Punkte A die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_A$ auf, so daß $\overrightarrow{Aa} = v_A$, und errichten in der Ebene AKa im Punkte a die Normale auf aK, so schneidet diese die Gerade AK in einem Punkte H, für den $\overrightarrow{HA} = \mathfrak{b}_{A\pi,1}$. Die Durchführung dieser Konstruktion in der ebenen Abbildung erfordert nur die Ermittlung des auf dem Bilde ω gelegenen Antipoles e_{KA} von $K'a'$ und die Verbindung von e_{KA} mit e_ω; letztere liefert das Bild aH, die Parallele hierzu durch a' führt zum gesuchten Punkte H' auf $A'K'$.

Macht man im Beschleunigungsplane $P(\alpha) = H'A'$, so ist in $\overrightarrow{(\alpha)\,\alpha}$ die Richtung und Länge des Bildes von $\mathfrak{b}_{A\pi,2}$ gefunden, das Bild geht durch e_A. Da nun die beiden Vektoren $\mathfrak{b}_{BA,2}$ und $\mathfrak{b}_{A\pi,2}$ auf $\mathfrak{l}$ senkrecht stehen, so ist das Bild des gesuchten Vektors $\mathfrak{l}$ der Winkelbeschleunigung als Antipolare des Schnittpunktes e_l der Bilder der bezeichneten Vektoren zu finden. Die Länge $c\,l'$ des Bildes ergibt sich wieder durch Umkehrung der in Abb. 4 gezeigten Konstruktion mit Benutzung des Spurpunktes $g_{A,2}$ des in A angesetzten Vektors $\mathfrak{l}$; man macht $O'R = -b_{A\pi,2}$ und zieht $RL \perp g_{A,2}\,e_l$: dann ist $O'L = c\,l$ (c = Abbildungskonstante).

Mit der Kenntnis von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{l}$ sind die Beschleunigungen aller Systempunkte bestimmt, ihre einfache Konstruktion ist im Abschnitt V der angeführten Schrift mitgeteilt.

5. Die Bewegung der Pleuelstange. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des an die Taumelscheibe angeschlossenen Endes C der Pleuelstange ist nach Ziff. 2 und 3 bekannt; es sollen Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kolbens bestimmt werden. Man hat dabei die Bewegung eines starren Stabes bei räumlicher Führung seiner Endpunkte zu untersuchen mit der besonderen Vereinfachung, daß eine der räumlichen Führungskurven in eine Gerade ausartet.

Bei dieser Untersuchung kann man sich der gleichen Verfahren bedienen, die in Ziff. 3 und 4 zur Bestimmung von $\mathfrak{v}_B$ und $\mathfrak{b}_B$ aus $\mathfrak{v}_A$ und $\mathfrak{b}_A$ gezeigt und in voller Allgemeinheit im Abschnitt (III B) meiner Schrift dargestellt worden sind. 918

Die Beurteilung elektrischer Maschinen und Apparate durch Toleranzen auf Grund statistischer Methoden.[1]

Von **REINHOLD RÜDENBERG** in Berlin.

1. Einleitung. Es ist in der Elektrotechnik üblich, daß der Fabrikant von Maschinen, Transformatoren und Apparaten die wichtigsten Eigenschaften seiner Fabrikate zahlenmäßig gewährleisten muß, auch wenn es sich um Erzeugnisse handelt, die nach Aufbau und Wirkungsweise zu den kompliziertesten der Technik gezählt werden müssen. Besonders stark werden diese Gewährleistungen in zwei Fällen betont: Einerseits, wenn es sich um den Wirkungsgrad der Fabrikate handelt, weil jeder Energie-

[1]) Vortrag im Außeninstitut der Techn. Hochschule Berlin am 30. 11. 1928; Referat vor der Internation. Elektrotechn. Kommission in Genf am 22. 11. 1922.

Literatur bei Becker, Plaut & Runge, Anwendungen der mathemat. Statistik auf Probleme der Massenfabrikation, Berlin 1927.

verlust wirtschaftliche Nachteile während der Benutzung mit sich bringt. Andererseits, wenn die elektrische oder auch die mechanische Festigkeit in Betracht kommt, weil hiervon die Betriebssicherheit der gesamten Anlage in hohem Maße abhängt.

Da in der Elektrotechnik seit ihrer Anfangszeit die Meßmethoden und Meßinstrumente auf einer hohen Genauigkeitsstufe stehen, so hat man sich allmählich daran gewöhnt, die Schärfe der Gewährleistung weit höher zu treiben, als es in den meisten anderen Industriezweigen, mangels geeigneter Meßmethoden, üblich ist. Man darf dabei jedoch nicht übers Ziel hinausschießen, denn der Grad der möglichen Gewährleistung richtet sich nicht nur nach den Meßmethoden, sondern ebensosehr nach der Güte und Gleichmäßigkeit der verwendeten Materialien, nach der Art und Sauberkeit der Fabrikationsmethoden und schließlich nach der Möglichkeit, die meist komplizierte Wirkungsweise und die Störungen der gewünschten Effekte durch parasitäre, physikalische oder chemische Nebenerscheinungen mit ausreichender Genauigkeit vorher zu berechnen. Es hat sich auf Grund des hohen Standes der elektrotechnischen Wissenschaft eingebürgert, daß der Käufer auch bei neuartigen Maschinen und Apparaten sehr weitgehende und zahlenmäßig festgelegte Gewährleistungen bereits bei deren Bestellung verlangt, bevor noch der Gegenstand gebaut ist, und die zahlreichen eben genannten Einflüsse im Einzelfalle verifiziert werden können. Um ein Bild der beim heutigen Stande unserer Technik sachlich zu begründenden Gewährleistungen zu erhalten, wollen wir das Zusammenwirken der verschiedenen Ursachen für die tatsächlich auftretenden Ungenauigkeiten näher untersuchen.

2. Toleranz und Fehlergesetze. Mißt man den Wirkungsgrad oder die Verluste einer größeren Zahl gleichartiger Maschinen, so findet man fast für jede Maschine einen anderen Wert. Die Messungen gruppieren sich jedoch stets derart um ihren Mittelwert, daß geringe Abweichungen relativ häufig, große Abweichungen relativ selten sind. Zählt man daher die Meßpunkte, die in einzelnen gleichmäßigen Stufen um den Mittelwert herum vorhanden sind, und trägt die so bestimmte Häufigkeit über der Größe der Abweichung δ vom Mittelwert auf, so erhält man eine Kurve, die für einen bestimmten Fall in Abb. 1 durch den gebrochenen Linienzug dargestellt ist. Je mehr Messungen man zusammenträgt, um so weniger zackig wird erfahrungsgemäß der Verlauf einer solchen Kurve.

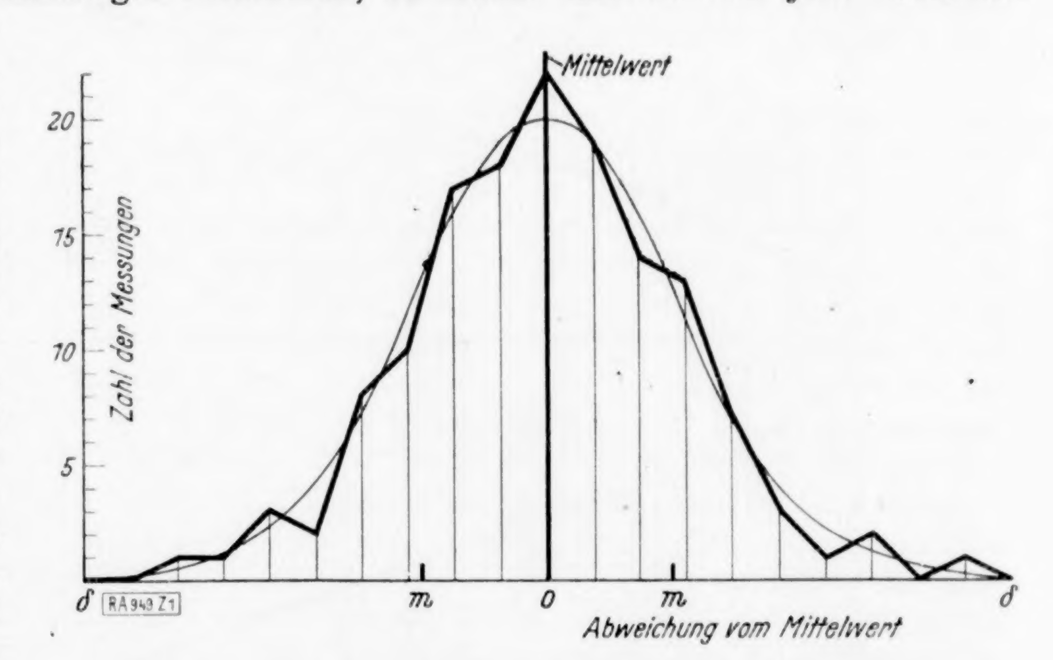


Abb. 1. Häufigkeitskurve von Wirkungsgradmessungen.

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es bekannt, daß sich eine solche Häufigkeitskurve bei genügend großer Zahl der Messungen und bei Abwesenheit von systematischen Fehlern der Gaußschen Fehlerkurve anschmiegt, die in Abb. 1 dünn eingetragen ist. Diese Fehlerkurve gehorcht der Beziehung

$$\varphi(\delta) = \frac{\varepsilon^{-1/2(\delta/m)^2}}{\sqrt{2\pi}\, m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Dabei bedeutet δ die Abweichung jeder einzelnen Messung vom Mittelwert und m die mittlere Abweichung aller Messungen vom Mittelwert. In Abb. 2 ist die Gaußsche Fehlerkurve im größeren Maßstabe aufgetragen und die Lage des mittleren Fehlers ist kenntlich gemacht.

Die Fehlerkurve besitzt auf ihren beiden Seiten je einen Wendepunkt, dessen Lage gerade durch die Größe dieses mittleren Fehlers m bestimmt wird. Man kann daraus bei graphisch gegebener Fehlerkurve den mittleren Fehler oder die mittlere Abweichung mit Leichtigkeit abgreifen. Im allgemeinen wird die Zahl der Messungen nicht so groß sein,

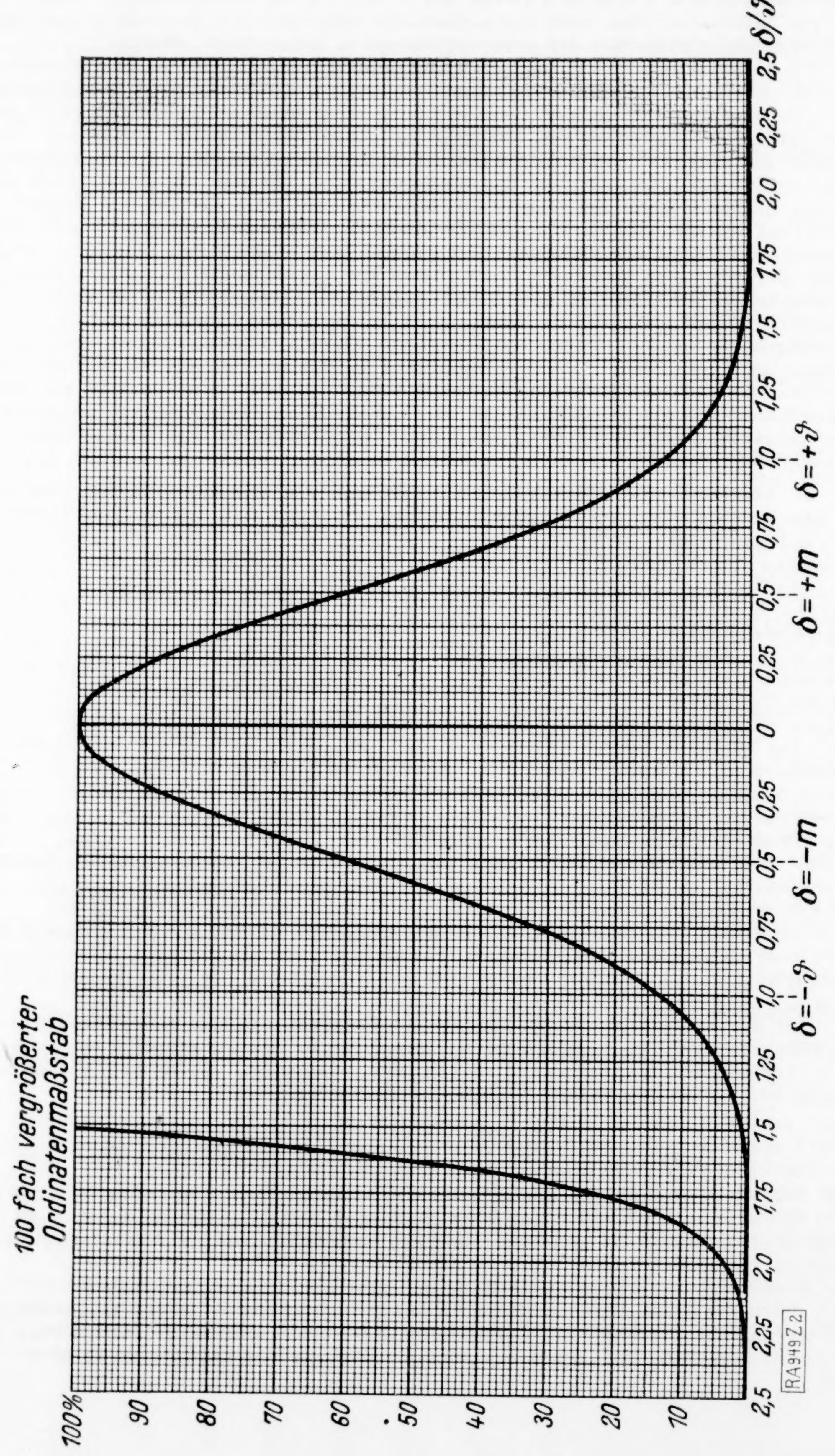


Abb. 2. Gaußsche Fehlerkurve.

daß sich eine für diese Abschätzung ausreichend glatte Kurve ergibt. Man kann den mittleren Fehler dann nach der Wahrscheinlichkeitslehre beim Vorhandensein einer Zahl von n Messungen entsprechend der Gaußschen Formel bestimmen zu

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n-1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

was auch noch für eine relativ geringe Zahl von Messungen gültig ist.

Hat man, um ein Beispiel zu geben, die Wirkungsgrade von 10 gleichartigen Drehstrommotoren gemessen, so rechnet man sich zunächst den arithmetischen mittleren Wirkungsgrad aus, alsdann stellt man die Abweichungen jedes einzelnen Wirkungsgrades von diesem Mittelwert fest, quadriert dieselben, summiert sie nach Gl. (2), dividiert sie durch die Zahl 9 und erhält alsdann durch Wurzelziehen die mittlere Abweichung m aller Meßwerte vom Mittelwert des Wirkungsgrades. Dieser Wert ist auch in der Zackenkurve der Abb. 1 eingetragen.

Bei einer relativ kleinen Zahl von Motoren ist es nicht einmal gesagt, daß der arithmetische Mittelwert der Messungen der gleiche ist, den man erhalten würde, wenn man viele hundert oder gar tausend gleichartige Motoren durchmessen würde. Die Wahrscheinlichkeitslehre gibt das Resultat, daß der mögliche Fehler des arithmetischen Mittelwertes den Wert besitzt

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Er wird also langsam geringer, mit der Wurzel aus der Zahl der Messungen. Hat man beim obengenannten Beispiel der 10 Drehstrommotoren etwa eine mittlere Abweichung der verschiedenen Wirkungsgradmessungen von 1 vH festgestellt, so muß man mit einem möglichen Fehler des aus den 10 Messungen errechneten mittleren Wirkungsgrades von etwa $^1/_3$ vH rechnen.

Würde man den gewährleisteten Wirkungsgrad beim Verkauf eines der oben erwähnten 10 Motoren mit dem mittleren Wirkungsgrad identifizieren, der sich auf Grund einer solchen Serienmessung ergeben hat, so würde man auf sehr unliebsame Verhältnisse kommen. Denn genau die Hälfte der Motoren würde diesen Wirkungsgrad zwar mehr oder weniger überschreiten, die andere Hälfte jedoch würde ihn mehr oder weniger unterschreiten und würde daher von einem anspruchsvollen Käufer zurückgewiesen werden. Der Fabrikant hätte also auf Grund seiner zunächst sauber aussehenden Mittelwertsbestimmung das Nachsehen. Das nächste Mal würde er den gewährleisteten Wirkungsgrad im Interesse des Verkaufs seiner Motoren geringer ansetzen müssen und zwar um ein solches Maß unterhalb des arithmetischen Mittelwertes, daß er sicher ist, daß der ganze oder wenigstens der größte Bereich seiner Messungen, die vielleicht der Zackenkurve von Abb. 1 entsprechen, oberhalb der gewährleisteten Ziffer liegt. Hierdurch wird der nominelle Wirkungsgrad der Motoren aber erheblich verkleinert und dies liegt weder im Interesse des Fabrikanten noch im Interesse des Benutzers der Motoren. Denn der letztere hat im allgemeinen nicht nur einen einzigen, sondern zahlreiche Motoren in seinem Betriebe laufen und es interessiert ihn aus Gründen der Wirtschaftlichkeit letzten Endes in der Hauptsache der mittlere Wirkungsgrad aller dieser Motoren.

Es ist aus diesen Gründen heute üblich, für die Wirkungsgrade elektrischer Maschinen und Transformatoren die Mittelwerte anzugeben, die einer größeren Zahl von Gegenständen entsprechen und außerdem durch einen Toleranzwert denjenigen Bereich um den Mittelwert herum zu gewährleisten, in den die tatsächliche Messung mit Sicherheit hineinfällt.

Es fragt sich nun, welche Größen ein solcher Toleranzbereich besitzen soll. Man könnte zunächst daran denken, das oben definierte Maß der mittleren Abweichung m für den gewährleisteten Bereich anzusetzen. Jedoch sieht man aus Abb. 2, daß dann nur eine mäßig große Zahl von Motoren der Abnahmeprobe genügen würde. Wie man durch Ausrechnen der Flächenstücke feststellen kann, würden dann immer noch 16 vH der Motoren einen zu kleinen Wirkungsgrad besitzen, andere 16 vH würden einen zu großen besitzen, was allerdings nicht stören würde.

Legt man nun die Toleranzgrenzen auf das Doppelte des mittleren Fehlers, setzt man also für die Toleranz ϑ fest

$$\vartheta = 2\,m = 2\sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n-1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

so ersieht man aus Abb. 2, daß die Zahl der außerhalb des gewährleisteten Bereiches liegenden Prüflinge schon außerordentlich verkleinert ist. Man kann nach der Wahrscheinlichkeitslehre berechnen, daß nur noch 2,3 vH aller Werte unterhalb, und ein ebenso großer Betrag oberhalb dieses Streifens liegen. Diese Zahlen erscheinen für die Praxis brauchbar, und es soll daher die Gl. (4) als Definition für die technische Toleranz ϑ dienen, die somit gleich der doppelten mathematischen mittleren Abweichung m festgelegt wird.

Wenn man nunmehr auf Grund der Messungen an den obengenannten 10 Motoren beispielsweise angibt, daß der Wirkungsgrad dieses Motormodells gleich 90 vH $\pm$ 1 vH Toleranz ist, so muß man bei Lieferung größerer Motormengen damit rechnen, daß deren Wirkungsgrad sich im allgemeinen innerhalb der Grenzen von 89 bis 91 vH bewegt mit einer Verteilung, die durch Abb. 2 dargestellt wird. Nur hier und da wird einmal ein Motor unter 89 vH Wirkungsgrad besitzen, und zwar im Durchschnitt jeder $\frac{100}{2,3} = 44$ ste Motor. Dieser Motor muß dann nachträglich durch fabrikatorische Aenderungen oder Zusatzmaßnahmen im Wirkungsgrad verbessert werden, wenn man ihn zu den gleichen Bedingungen verkaufen will. Ebenso wird natürlich jeder 44 ste Motor einen zu guten Wirkungsgrad besitzen, jedoch wird das wohl nie zu Beanstandungen führen.

Um für einzelne Fälle den Zahlenwert der Ueber- und Unterschreitungen dieser Grenzen genauer zu ermitteln, ist in Abb. 3 die Integralkurve des Gaußschen Fehlergesetzes nach Gl. (1), das Fehlerintegral oder die Wahrscheinlichkeitskurve, aufgezeichnet. Man entnimmt aus ihr unmittelbar, daß bei Angabe des arithmetischen Mittelwertes selbst 50 vH aller Werte von ausgeführten Maschinen oberhalb und 50 vH unterhalb des Mittelwertes liegen, und daß bei zunehmender Streifenbreite bis zu $\pm m$ oder $\pm \vartheta$ oder darüber eine immer weiter abnehmende Zahl von Wirkungsgraden unterhalb der Grenze liegt.

Zahlentafel 1.

Wahrscheinlichkeit der Lage der Messung innerhalb und außerhalb des Toleranzbereichs.

Toleranz	0	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4	der normalen
Innerhalb	0	38,3	68,3	86,6	95,4	98,8	99,72	99,96	99,994	vH
Außerhalb	100	61,7	31,7	13,4	4,6	1,2	0,28	0,04	0,006	vH

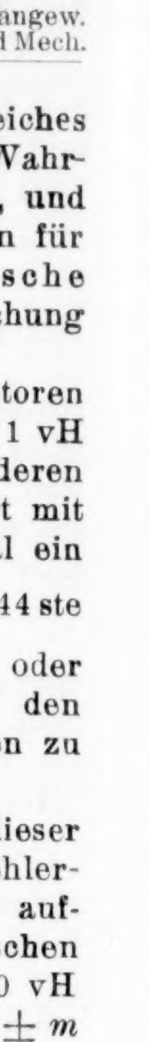
In Zahlentafel 1 ist für verschiedene Bruchteile der normalen Toleranz ϑ nach Gl. (4) angegeben, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß die gesamten Meßwerte innerhalb oder außerhalb des Streifens liegen, wobei die Streifenbreite stets symmetrisch um den arithmetischen Mittelwert, also um den Nullwert von Abb. 3 herum, liegt. Tafel 2 gibt ganz entsprechend an, wie groß für verschiedene Bruchteile der normalen Toleranz ϑ die Wahrscheinlichkeit der Ueberschreitung des Grenzwertes ist, sowohl für abgezogene wie für zugezählte Toleranzen.

Bei Wirkungsgraden interessiert sich der Benutzer zwar, wie oben erwähnt, aus Gründen der Wirtschaftlichkeit im wesentlichen für den mittleren Wirkungsgrad aller seiner elektrischen Maschinen. Wenn er aber eine einzelne Maschine hinzukauft, so wünscht er

Zahlentafel 2.

Risiko der Unterschreitung und Wahrscheinlichkeit der Ueberschreitung der unteren Toleranzgrenze.

	Abgezogene Toleranz								Grundwert	Zugezählte Toleranz								
Toleranz	8/4	7/4	6/4	5/4	4/4	3/4	2/4	1/4	0	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4	der normalen
Risiko	0,003	0,02	0,14	0,63	2,3	6,7	15,9	30,9	50	69,2	84,2	93,2	97,7	99,37	99,86	99,98	99,997	vH
Wahrscheinlichkeit	99,997	99,98	99,86	99,37	97,7	93,2	84,2	69,2	50	30,9	15,9	6,7	2,3	0 63	0,14	0,02	0,003	vH



Vergrößerter Ordinatenmaßstab

10 fach

100

1000

100% 90 80 70 60 50 40 30 20 10

2,5 2,25 2,0 1,75 1,5 1,25 1,0 0,75 0,5 0,25 0 0,25 0,5 0,75 1,0 1,25 1,5 1,75 2,0 2,25 2,5 δ/ϑ

$\delta = -\vartheta$ $\delta = -m$ $\delta = +m$ $\delta = +\vartheta$

RA949Z3

Abb. 3. Fehlerintegralkurve oder Wahrscheinlichkeitskurve.

deren gewährleisteten Wirkungsgrad natürlich trotzdem so hoch wie möglich zu erhalten, und es gibt häufig einen erbitterten Kampf um diesen Garantiewert zwischen Hersteller und Abnehmer. Dabei müssen vom Hersteller auch eine Reihe anderer Risiken übernommen werden, wie z. B. Strafen bei Unterschreitung, Bonus bei Ueberschreitung der gewährleisteten Zahl, oder gar eine Zurückweisung der ganzen Maschine bei nicht eingehaltenem Wirkungsgrad. Es kann daher in einzelnen Fällen erwünscht sein, diese verschiedenen Risiken gegeneinander auszugleichen und die unterste Grenze des gewährleisteten Wirkungsgrades der Maschine, also den Mittelwert minus Toleranz, gegenüber dem Normalmaß nach Gl. (4) zu verschieben. Wenn der Fabrikant beispielsweise für einen Wechselstromgenerator einen Wirkungsgrad von 90 vH $\pm$ 1 vH Toleranz angegeben hat, so würde bei Abziehen der vollen Toleranz beim Geschäftsabschluß zwischen Verkäufer und Abnehmer der Wirkungsgrad von 89 vH mit 97,7 vH Wahrscheinlichkeit überschritten werden. Eine so hohe Sicherheit wird man beim Vorliegen scharfer Verpflichtungen sicher anwenden müssen, bei denen es nötig ist, das Risiko der Erreichung des Wirkungsgrades fast vollständig aus der Welt zu schaffen. Der Verkäufer wird es aber in einzelnen Fällen je nach Umständen auch einmal für zweckmäßig halten, nur die halbe Toleranz vom Mittelwert des Wirkungsgrades abzuziehen, also im ebengenannten Falle 89,5 vH Wirkungsgrad zu garantieren, und hat dann nach Abb. 3 und Zahlentafel 2 immer noch 84,2 vH Wahrscheinlichkeit dafür, daß auch dieser höhere Wirkungsgrad überschritten wird.

Er wird eine solche niedrigere Wahrscheinlichkeit in Fällen geringeren geschäftlichen Risikos manchmal in Kauf nehmen können, falls ihm am Erhalt des Auftrages viel gelegen ist. Zahlentafel 2 gibt für alle solche Toleranzbruchteile, die man vom Grundwert des Wirkungsgrades abzieht oder hinzuzählt, sofort die Wahrscheinlichkeit an, daß der hierdurch erzielte Wirkungsgrad noch überschritten wird, oder das Risiko, daß er unterschritten wird.

Wenn für eine Maschine einmal der mittlere Wirkungsgrad und seine Toleranz festliegt, so kommen für die Wahl der Gewährleistung eines bestimmten Wirkungsgrades für den Verkäufer keine weiteren technischen Gesichtspunkte in Betracht, sondern nur noch Fragen des größeren oder kleineren kaufmännischen Risikos, und dieses kann nach Zahlentafel 2 und Abb. 3 zahlenmäßig vollständig beurteilt werden. Anzustreben ist natürlich stets, daß der Verkauf einer wichtigen Maschine nicht auf Grund einer festen, bestimmten Wirkungsgradzahl zustande kommt, sondern daß stets Mittelwert und $\pm$ Toleranz zu Grunde gelegt werden, wie es der Natur der Herstellung und Arbeitsweise derartiger Verkaufsgegenstände entspricht.

3. Zusammengesetzte Toleranzen. In vielen Fällen muß man Wirkungsgrade, Verluste und andere mit Toleranzen behaftete Werte zusammensetzen, um die Wirkungsweise im ganzen zahlenmäßig beurteilen zu können. Die Gesamtverluste, z. B. irgendeines Maschinensatzes, setzen sich dabei additiv aus den einzelnen Verlusten zusammen. Es ist

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots \qquad (5).$$

Würde man auch die Toleranzen der Einzelverluste einfach addieren, so würde man hierdurch zum Ausdruck bringen, daß die ungünstigsten Werte, die für alle einzelnen Verluste möglich sind, gleichzeitig auftreten. Dies ist aber außerordentlich unwahrscheinlich. Im allgemeinen wird vielmehr bei mehreren voneinander unabhängigen Erscheinungen die ungünstigste Chance der einen nicht gerade immer mit der ungünstigsten Chance der anderen zusammentreffen. Wir müssen daher erwarten, daß die Gesamttoleranz mehrerer Erscheinungen geringer ist, als die Summe der Einzeltoleranzen.

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt, daß der mittlere Fehler einer Summe sich durch quadratische Addition aus den einzelnen Summanden zusammensetzt. Da die Toleranz nach Gl. (4) das doppelte des mittleren Fehlers ist, so berechnet sich auch die zusammengesetzte Toleranz aus der Quadratsumme der Einzeltoleranzen, also nach der Formel

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 \dots} \qquad (6).$$

Zur Gesamttoleranz liefert also die größte Einzeltoleranz bei weitem den stärksten Beitrag, während der Einfluß der geringeren Einzeltoleranzen ziemlich unbeträchtlich ist. Der absolute Wert der Gesamttoleranz ist natürlich immer größer als die größte Einzel-

toleranz, bleibt aber hinter der algebraischen Summe der Einzeltoleranzen weit zurück.

Ein Beispiel möge dieses veranschaulichen. Bei einem Dampfturbogenerator besitze die Turbine für sich eine Toleranz von $\vartheta_1 = 3$ vH, der zugehörige Generator eine Toleranz von $\vartheta_2 = 1$ vH, beides bezogen auf den wirklichen Dampfverbrauch. Der gesamte Maschinensatz besitzt dann nicht etwa eine Toleranz des Dampfverbrauches von $3 + 1 = 4$ vH, sondern nur von $\vartheta = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3{,}16$ vH. Diese relativ günstige Zahl entspricht der Tatsache, daß es hochgradig unwahrscheinlich ist, daß Turbine und Generator beide gleichzeitig sehr schlecht oder gleichzeitig sehr gut ausfallen, daß es vielmehr wahrscheinlicher ist, daß bei einer extrem schlecht ausgefallenen Dampfturbine der Generator sich auf der mittleren Linie hält oder umgekehrt. Würde man die Annahme machen, daß bei sehr schlechtem Ausfall der Turbine der Generator sich nahe bei seinem Sollwert hält, und würde man dementsprechend nur die Turbinentoleranz von 3 vH für den ganzen Satz zugrunde legen, so würde diese Annahme wiederum zu günstig sein. Das Zusammenwirken der Fehlermöglichkeiten in beiden Maschinen wird nach den strengen Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die Formel (6) ausgedrückt und führt zu einer Toleranz, die mit ihren 3,16 vH zwischen der größten Toleranz von 3 vH und der algebraischen Summe von 4 vH liegt.

Arbeiten mehrere unter sich gleiche Maschinen zusammen, so hat es Interesse, die Toleranz dieser Gruppe von Maschinen zu bestimmen. Wenn V_1 den Verlust in jeder Einzelmaschine bezeichnet, so sind die Gesamtverluste aller z Maschinen nach Gl. (5)

$$V = V_1 z \qquad (7).$$

Die Gruppentoleranz aller Maschinen zusammen bestimmt sich dagegen nach Gl. (6) aus des Toleranz ϑ_1 der Einzelmaschine zu

$$\vartheta = \vartheta_1 \sqrt{z} \qquad (8).$$

Sie wächst also nur mit der Wurzel aus der Maschinenzahl. Die relative Gesamttoleranz der Maschinengruppe ist daher

$$\vartheta / V = -\frac{\vartheta_1 / V_1}{\sqrt{z}} \qquad (9).$$

Sie wird also geringer mit der Wurzel aus der Zahl der Maschinen. Das gleiche Gesetz gilt auch für den Zusammenhang der Wirkungsgradtoleranz für Einzelmaschinen und für die ganze Gruppe.

Da es bei der Benutzung größerer Maschinenmengen nicht so sehr auf den Einzelverlust und Einzelwirkungsgrad als auf die Gesamtverluste und den mittleren Wirkungsgrad der ganzen Maschinengruppe ankommt, so kann es zweckmäßig sein, in diesem Falle nur den mittleren Wirkungsgrad der Maschinengruppe zu gewährleisten, denn bei diesem ergibt sich nach Gl. (9) eine wesentlich geringere Toleranz. Werden beispielsweise neun gleichartige Umformer verkauft, deren jeder eine Wirkungsgradstoleranz von 1,5 vH besitzt, so ist die Gesamttoleranz für den mittleren Wirkungsgrad aller Umformer $\frac{1{,}5 \text{ vH}}{\sqrt{9}} = 0{,}5$ vH. Die Treffsicherheit für den vorausberechneten mittleren Wirkungsgrad ist also schon bei neun Maschinen dreimal so groß geworden.

Hat man sich beispielsweise in einem solchen Falle wegen hoher Strafen beim Verkauf entschieden, der größeren Sicherheit halber bei der Gewährleistung des Wirkungsgrades die gesamte Toleranz abzuziehen, so kann man dem Käufer bei Gewährleistung eines mittleren Wirkungsgrades aller 9 Umformer einen um $1{,}5 - 0{,}5 = 1$ vH höheren Wirkungsgrad garantieren, als wenn man den Wirkungsgrad jedes Einzelumformers gewährleisten würde, ohne daß bei diesem Verfahren die Gefahr der Unterschreitung dieses höheren Wirkungsgrades irgendwie vergrößert würde. Ein Unterschied von 1 vH im gewährleisteten Wirkungsgrad wird aber in vielen Fällen beim Verkauf von ausschlaggebender Bedeutung sein.

Wir wollen nun betrachten, in welcher Weise wir Zahlenwerte für die Toleranzen unserer elektrischen Maschinen und Apparate gewinnen können, die wir den praktisch üblichen Gewährleistungen zugrunde legen. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, die gemessenen Wirkungsgrade einer großen Zahl von Maschinen jedesmal mit dem vorausberechneten Wirkungsgrad zu vergleichen, und die Toleranz nach Gl. (4)

aus den jeweiligen Abweichungen auszurechnen. Man erhält dann als Ergebnis, daß die Toleranz etwa 10 vH der Abweichung des Wirkungsgrades η von 1 ist, also

$$\vartheta_{\eta} \simeq \frac{1-\eta}{10} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Diese einfache Vorschrift ist auf Grund derartiger Messungen vor vielen Jahren vom »Verband Deutscher Elektrotechniker« eingeführt worden und wurde inzwischen auch in die Vorschriften zahlreicher anderer Nationen aufgenommen. Diese Zahl stellt aber nur einen Mittelwert dar, der für allgemeine Regeln sehr empfehlenswert ist; in Wirklichkeit ist jedoch die Wirkungsgradtoleranz bei verschiedenartigen Maschinen recht verschieden groß und kann unter Umständen günstiger sein. Dies rührt vor allem daher, daß die Verlustverteilung von Maschinengattung zu Maschinengattung sehr unterschiedlich ist, so wie es z. B. für verschiedenartige Synchronmaschinen in Abb. 4 dargestellt ist. Es sind dort im unteren Teil Mittelwerte für die Gesamtverluste von Riemenläufern, Kolbenmaschinen, Wasserkraftmaschinen und Turbogeneratoren dargestellt, und für jede Maschinengattung ist darüber die durchschnittliche Verteilung auf die einzelnen Arten der Verluste angegeben. Man sieht, daß beispielsweise bei Kolbenmaschinen die Kupfer- und Eisenverluste am größten sind, und die Reibungs- und Zusatzverluste stark zurücktreten, während sich diese Verhältnisse bei Turbogeneratoren gerade umkehren. Es ist natürlich nicht zu erwarten, daß der Wirkungsgrad so verschiedenartiger Maschinen die gleiche Gesamttoleranz besitzt, und noch weniger darf man dies bei andersartigen Maschinen wie Asynchronmotoren, Gleichstrommaschinen, Kollektormaschinen usw. annehmen.

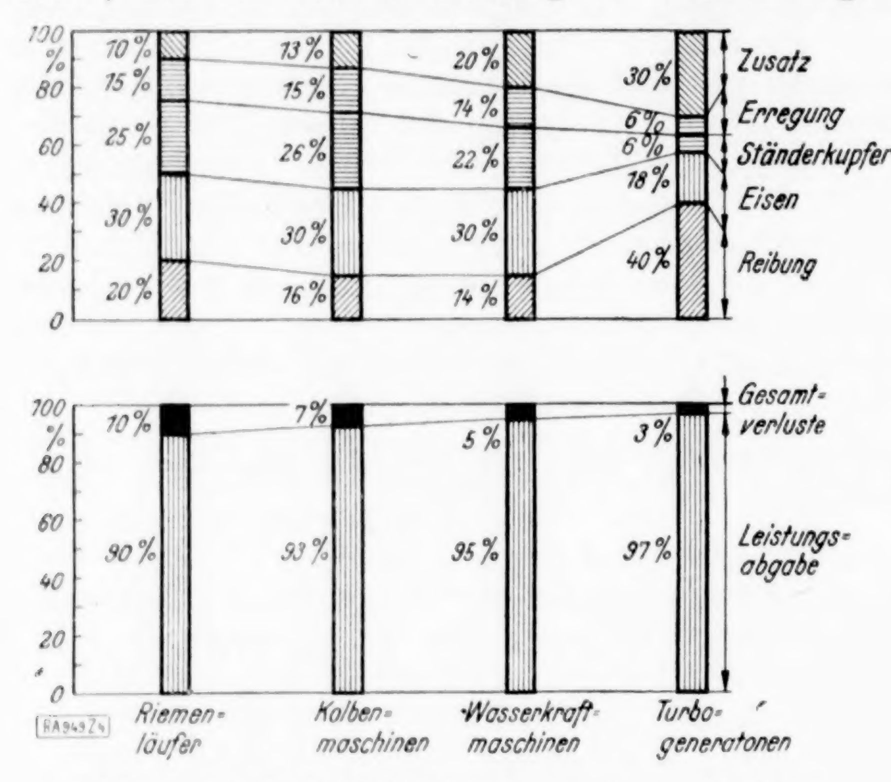


Abb. 4. Verlustverteilung von Synchronmaschinen.

Mißt man aber die Einzelverluste der verschiedenartigen Maschinengruppen für sich und errechnet sich deren Toleranz nach Gl. (4) aus mehreren Meßreihen, so findet man für die Einzelverluste jeder Maschinenart stets nahezu die gleichen Toleranzen. Durchschnittswerte hierfür sind in Zahlentafel 3 niedergelegt. Es zeigt sich, daß selbst die einfachste Widerstandsberechnung einer Wicklung durch die Nachmessung an der fertigen Maschine im allgemeinen nicht zu verifizieren ist, sondern daß man erhebliche Abweichungen vom Rechnungswert erhält, die durch den verschiedenen Ausfall des Kupfermaterials, des Drahtquerschnitts und der Wicklungslänge bedingt sind. Die Toleranzen für die Kupferverluste liegen für die verschiedenartigen Ständer- und Läuferwicklungen zwischen 10 und 20 vH.

Etwas größer noch wird die Toleranz für die Eisenverluste, bei denen ebenfalls Ungleichmäßigkeiten im Material und durch das Stanzen und Paketieren der Bleche auftreten. Noch größer wird die Toleranz der Reibungsverluste in den Maschinen,

Zahlentafel 3.

Durchschnittswerte für die Einzelverlust-Toleranzen.

Art der Verluste	Toleranz
Ständerwicklung	10 bis 15 vH
Läuferwicklung	15 » 20 »
Eisen	15 » 30 »
Reibung	20 » 40 »
Zusätzlich	30 » 50 »

für die es überhaupt schwierig ist, saubere Methoden zur Vorausberechnung zu entwickeln. Am größten ist die Toleranz naturgemäß für die zusätzlichen Verluste, die meistens durch irreguläre Wirbelstrombildung an den verschiedensten Stellen der Maschine hervorgerufen werden. Sie kann bis zu 30 und 50 vH und manchmal noch mehr anwachsen, wenn man sich nicht bei der Vorausberechnung genaueste Rechenschaft über das Auftreten der Verluste gibt.

Für die Wicklungs- und Eisenverluste sind Berechnungsmethoden bekannt, die eine einigermaßen gute physikalische Grundlage besitzen. Die Toleranzen umgreifen daher hier vor allem Ungenauigkeiten in Material und Ausführung. Dagegen umgreifen sie bei den Reibungs- und Zusatzverlusten auch Ungenauigkeiten der Berechnungsmethoden, die bei diesen beiden Verlustarten auf weniger gesichertem Boden stehen. Bei allen Verlusten sind natürlich die unvermeidlichen Fehler bei der Messung mit in den Ziffern enthalten.

Hat man nun die relativen Toleranzen für die Einzelverluste einmal experimentell festgelegt und hat man für bestimmte Maschinen die Mittelwerte der Sollverluste nach den üblichen Formeln vorausberechnet, so ergeben sich ohne weiteres die absoluten Verlusttoleranzen ϑ für Kupfer, Eisen, Reibung usw. in kW, und wenn man diese nach der Vorschrift von Gl. (6) addiert, so erhält man die Gesamtverlusttoleranz zu

$$v = \sqrt{\vartheta^2_{\mathrm{Cu}\,1} + \vartheta^2_{\mathrm{Cu}\,2} + \vartheta^2_{\mathrm{Fe}} + \vartheta^2_{\mathrm{Rbg}} + \vartheta^2_{\mathrm{Zus}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Im Verhältnis zu den Gesamtverlusten V kann dies ein sehr viel geringerer Wert werden als die Einzelwerte der Zahlentafel 3, ganz entsprechend den Betrachtungen, die zu Gl. (9) geführt haben.

Zahlentafel 4.

Berechnung der Verlusttoleranz.

Art der Verluste	Toleranz vH	V kW	ϑ kW	ϑ^2
Ständerwicklung	10	22	2,2	4,9
Läuferwicklung	20	14	2,8	7,9
Eisen	15	30	4,5	20,3
Reibung	30	14	4,2	17,7
Zusätzlich	50	20	10,0	100,0
Summe		100		150,8
Verlusttoleranz				$v = \sqrt{150,8} = 12,3$ kW

In Zahlentafel 4 ist die Durchrechnung für das Beispiel eines Wasserkraftgenerators mit der Verlustverteilung nach Abb. 4 dargestellt. Die rechnungsmäßigen Gesamtverluste betragen für eine bestimmte Maschine 100 kW, die Einzeltoleranzen in kW errechnen sich direkt aus den Einzelverlusten, und die Gesamttoleranz bestimmt sich durch Anwendung der Gl. (11) zu 12,3 kW. Diese Zahl gibt gleichzeitig den Prozentsatz im Verhältnis zu den Gesamtverlusten von 100 kW an. Man sieht, daß dieser Prozentsatz wesentlich geringer ist als die höchste relative Toleranz der Einzelverluste, er kann sogar unter deren niedrigsten Wert sinken. Hier kommt wieder die günstig wirkende Tatsache zum Ausdruck, daß es nicht wahrscheinlich ist, daß die unvermeidlichen Ungleichmäßigkeiten der Maschine gleichzeitig verschlechternd auf alle Verluste wirken, sondern daß es wahrscheinlich ist, daß sie sich zum Teil entgegenwirken. Den Ausschlag für den Wert der Verlusttoleranz gibt der große Anteil für die Zusatzverluste.

Der Wirkungsgrad der Maschine ergibt sich nunmehr in bekannter Weise aus der abgegebenen Leistung W und den Verlusten V einschließlich der Verlusttoleranz v zu

$$\eta = \frac{W}{W + V \pm v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Führen wir hierin den in üblicher Weise berechneten Sollwirkungsgrad

$$\eta_0 = \frac{W}{W + V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

ein, der nur mit den berechneten Verlusten ohne Berücksichtigung der Toleranz bestimmt ist, so ergibt sich nach einfachen Umrechnungen

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 \pm \frac{v}{W+V}} = \frac{\eta_0}{1 \pm \frac{v}{V}(1-\eta_0)} \simeq \eta_0 \mp \frac{v}{V}\eta_0(1-\eta_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Dabei ist die zuletzt angewandte binomische Entwicklung für praktisch vorliegende Verhältnisse immer genau genug, weil sowohl die relative Verlusttoleranz v/V als auch die Abweichung des Sollwirkungsgrades η_0 von 1 stets kleine Zahlen unter 1 sind.

Die Wirkungsgradtoleranz selbst wird daher bestimmt durch

$$\vartheta_\eta = \frac{v}{V}\eta_0(1-\eta_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Gegenüber der früheren überschlägigen Bestimmung der Wirkungsgradtoleranz nach Gl. (10) ist die genaue Errechnung über die Verlusttoleranzen nach Gl. (11) und (15) ein wenig mühsamer, sie hat aber den Vorteil, für jede einzelne Maschine einen den besonderen Verhältnissen dieses Maschinenmodells angemessenen Wert zu ergeben.

Die in Zahlentafel 4 stehenden Zahlen beziehen sich auf einen Generator von 2000 kW Nutzleistung. Sein Wirkungsgrad bestimmt sich daher zu

$$\eta = \frac{2000}{2000 + 100 \pm 12{,}3} = \begin{Bmatrix} 95{,}0 \\ 96{,}0 \end{Bmatrix} = 95{,}5 \text{ vH} \pm 0{,}5 \text{ vH},$$

was man natürlich ebenso leicht durch direktes numerisches Auswerten wie durch Anwendung der Gl. (15) errechnen kann.

4. Praktische Toleranzkurven. Wir wollen nun an Hand einer Reihe von Messungen die im elektrotechnischen Maschinen- und Apparatebau praktisch vorliegenden Verhältnisse betrachten. In den Abb. 5 bis 10 sind Messungen wiedergegeben, die an ca. 300 asynchronen Drehstrommotoren vorgenommen wurden. Sie sind alle derart aufgetragen, daß die Meßwerte in eine Reihe gleich breiter Intervalle von je 5 vH Weite aufgeteilt wurden und daß in der Mitte jedes Intervalls die Anzahl der Messungen als Ordinate aufgetragen wurde, die in dieses Intervall fallen.

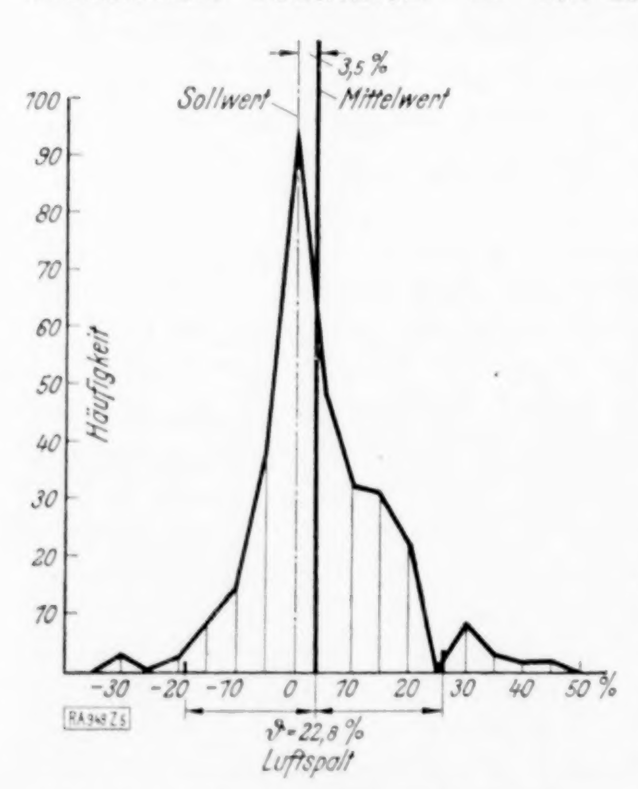


Abb. 5. Toleranzkurve des Luftspaltes von Asynchronmotoren.

Es ist bekannt, daß die Eigenschaften dieser Maschinengattung sehr stark von der Größe des Luftspaltes zwischen Ständer und Läufer abhängen, den man aus elektromagnetischen Gründen so klein wie möglich zu halten wünscht, während man ihn aus Gründen der Betriebsbrauchbarkeit nicht unter ein gewisses Maß bringen darf. Die Abb. 5 zeigt, um welche Beträge der tatsächlich ausgeführte Luftspalt von seinem Sollwert, der der sonstigen Berechnung der Motoren zugrunde gelegt ist, in Wirklichkeit abweicht. Die Abweichung ist in Prozenten ausgedrückt, damit man die Betrachtung nicht auf ein einziges Motormodell zu beschränken braucht, sondern die verschiedenartigsten Motoren durcheinander zur Auftragung verwenden kann. Natürlich ist es zweckmäßig, gesondert nachzuweisen, daß zwischen den einzelnen Arten von Asynchronmotoren, etwa nach Drehzahl oder Polteilung geordnet, keine prinzipiellen inneren Unterschiede bestehen.

Wir sehen nun aus Abb. 5, daß es der ausführenden Werkstatt nicht möglich war, die wirklichen Luftspalte auf ihren Sollwert zu bringen, ja, daß es nicht einmal gelungen ist, den arithmetischen Mittelwert der wirklich ausgeführten Luftspalte mit dem Sollwert in Uebereinstimmung zu bringen. Die Werkstattsarbeit ist also hier mit einem prinzipiellen, systematischen Fehler behaftet, der sich nach Abb. 5 zu 3,5 vH ergibt und der natürlich durch werkstattechnische Maßnahmen leicht abgestellt

werden kann. Nur bei Fortfall dieses systematischen Fehlers ist es möglich, die Vorausberechnung des Motors mit dem Mittelwert aller Ausführungen in Uebereinstimmung zu bringen.

Um den Mittelwert der Messungen herum gruppieren sich nun die Meßwerte für die Luftspalte der einzelnen 300 Motoren nach einer Kurve, die schon eine recht beträchtliche Annäherung an die glatte Gaußsche Fehlerkurve der Abb. 2 besitzt. Die Toleranz des Luftspaltes wurde nach Gl. (4) berechnet und beträgt 22,8 vH. Diese Zahl ist ein Maß für die Gleichmäßigkeit der reinen Werkstattsarbeit, jedoch einschließlich der Meßmethode, die in diesem Falle aber nur mit geringfügigen Fehlern behaftet ist.

Die Größe des Luftspaltes bestimmt vorwiegend den Magnetisierungsstrom des Asynchronmotors, der aber außerdem noch von den magnetischen Eigenschaften des Eisens, von der genauen Ausführung der Zähne und Nuten, von der Verteilung und Lagerung der Wicklung in den Nuten und Stirnverbindungen und von einer Reihe sonstiger Einzelheiten des elektromagnetischen Aufbaus der Maschine abhängt. In Abb. 6 ist die Toleranzkurve für den Magnetisierungsstrom dieser 300 Motoren nach denselben Gesichtspunkten aufgetragen. Auch hier zeigt sich zunächst eine systematische Abweichung des Mittelwertes vom Sollwert der Berechnung in Höhe von 16 vH. Dieselbe ist zum einen Teil auf den systematischen Fehler des Luftspaltes, zum anderen Teil auf einen systematischen Fehler im Berechnungsverfahren des Magnetisierungsstromes zurückzuführen. Dieses Verfahren war zunächst nur auf die Hauptabmessungen der Maschine gegründet und ließ sich nach einmaliger Feststellung der systematischen Abweichungen mit Leichtigkeit korrigieren, am einfachsten durch die Einführung eines Zuschlagsfaktors.

Außerdem tritt eine beträchtliche Streuung der Meßpunkte des Magnetisierungsstromes um ihren Mittelwert auf, die wesentlich größer ist als die Streuung des Luftspaltes, was seine Ursache in den unregelmäßigen Abweichungen der eben erwähnten elektromagnetischen Eigenschaften des Motors hat. Die Toleranz für den Magnetisierungsstrom errechnet sich zu 34,3 vH und ist in Abb. 6 eingetragen.

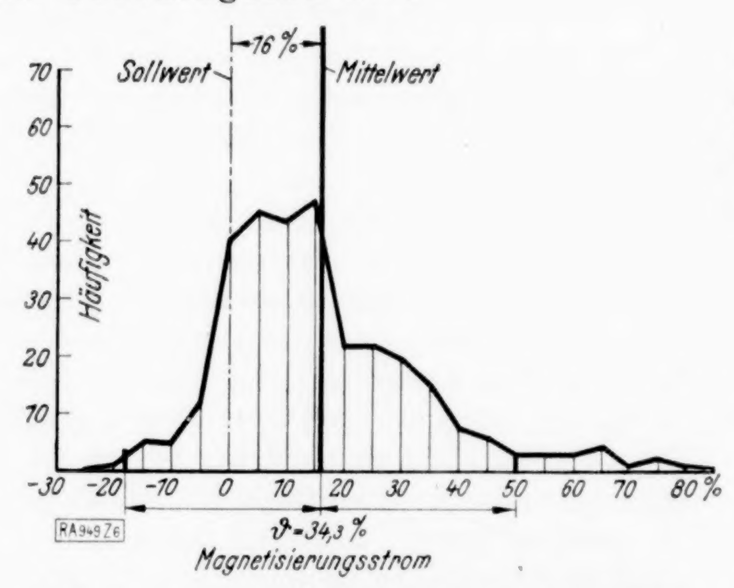


Abb. 6. Toleranzkurve des Magnetisierungsstromes von Asynchronmotoren.

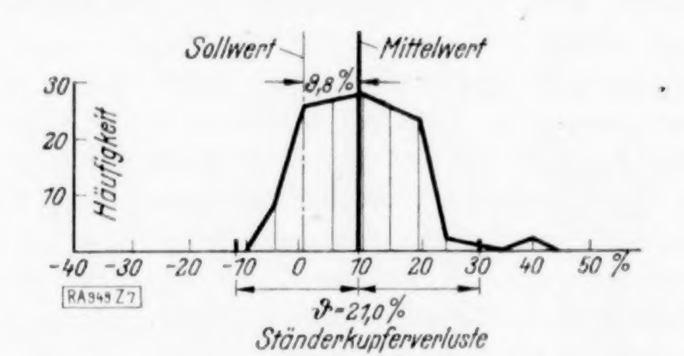


Abb. 7. Toleranzkurve der Ständerkupferverluste von Asynchronmotoren.

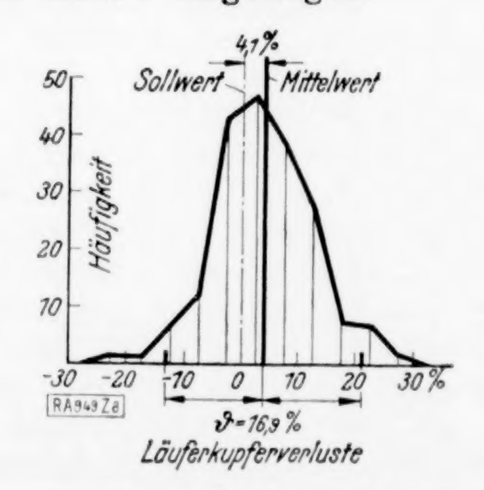


Abb. 8. Toleranzkurve der Läuferkupferverluste von Asynchronmotoren.

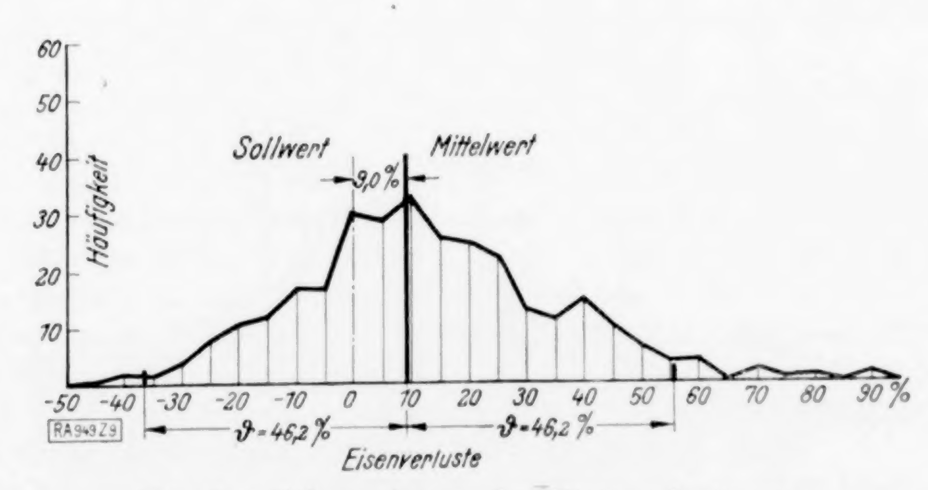


Abb. 9. Toleranzkurve der Eisenverluste von Asynchronmotoren.

Für die gleichen Asynchronmotoren sind in Abb. 7, 8 und 9 die Verluste aufgetragen, die in der Ständerwicklung, in der Läuferwicklung und in dem magnetischen Eisen auftreten. Auch hier sind nicht die absoluten Werte, sondern stets die prozentigen Abweichungen vom vorausberechneten Sollwert zur Darstellung gebracht, damit man die Messungen der sämtlichen, unter sich stark verschiedenartigen Motoren zu einem einheitlichen Ganzen verarbeiten kann. Sowohl die systematischen Fehler, die zu einer Korrektur des Berechnungsverfahrens führten, als auch die zufälligen Fehler mit ihren nach Gl. (4) berechneten Toleranzgrenzen, sind in den Abbildungen kenntlich gemacht. Die sehr große Toleranz der Eisenverluste der Abb. 9 rührt davon her, daß diese Aufstellungen kurz nach dem Weltkriege gemacht wurden, als die Ungleichmäßigkeit der Materialien ihren Höhepunkt erreicht hatte. Abb. 10 zeigt in gleicher Weise den Kurzschlußstrom dieser Asynchronmotoren, eine Größe, die für die Ueberlastbarkeit des Motors und für seinen Leistungsfaktor im Betriebe von ausschlaggebender Wichtigkeit ist.

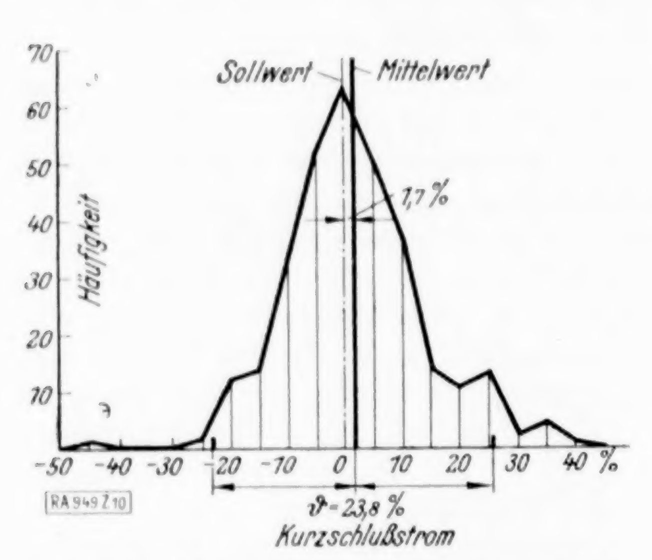


Abb. 10. Toleranzkurve des Kurzschlußstromes von Asynchronmotoren.

Alle systematischen Fehler, die sich aus diesen Kurven ergeben, kann man für spätere Motoren außer Wirkung bringen, indem man entsprechende Verbesserungsfaktoren an den verschiedenen Sollwerten einführt, die der Vorausberechnung zugrunde liegen oder sich aus ihr ergeben. Die zufälligen Fehler drücken sich dagegen in dem Begriff der Toleranz aus, die nach diesen Kurven für die verschiedensten praktisch wichtigen Eigenschaften der Asynchronmaschinen eines bestimmten Fabrikates bekannt sind, und die nunmehr den Gewährleistungen zugrunde gelegt werden können.

Man muß natürlich im praktischen Betriebe auf der einen Seite die Meßwerte der laufend hergestellten Maschinen dauernd überwachen, um sicher zu sein, daß die vielen zufälligen Fehler sich nicht einmal in irgend einer Arbeitsperiode zu größeren Toleranzen auswachsen. Auf der anderen Seite erhält man durch weitergehende Analyse dieser Häufigkeitskurven, besonders durch Unterteilung derselben nach den einzelnen Motorengruppen oder Baustofflieferungen und Aufdeckung der nun auftretenden systematischen Abweichungen der Teilkurven unter sich, häufig Hinweise darüber, auf welche Art man die Fabrikation verbessern kann, um eine größere Gleichmäßigkeit und eine geringere Toleranz zu erreichen.

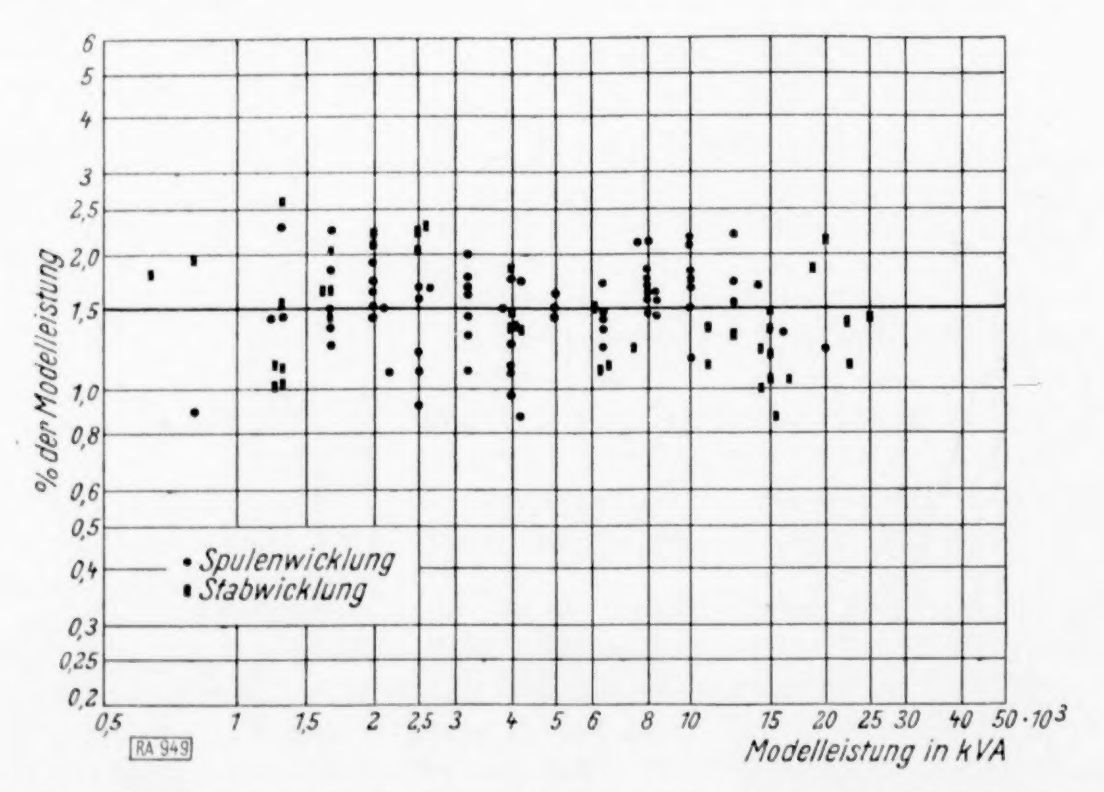


Abb. 11. Zusatzverluste in Turbogeneratoren abhängig von der Modelleistung.

Unter den elektromagnetischen Verlusten spielen die Zusatzverluste eine besonders große Rolle bei den Turbogeneratoren, weil ihr Anteil hier, wie Abb. 4 zeigte, alle anderen elektrischen Verluste überwiegt. Ein einwandfreies Berechnungsverfahren für sämtliche Zusatzverluste ist noch nicht bekannt. Infolgedessen ist ihre Größe in Abb. 11 zur Gewinnung eines Mittelwertes einfach in Prozenten der Maschinenleistung über dieser Leistung selbst aufgetragen. Es zeigt sich, daß man von kleinen bis zu großen Maschinen ungefähr mit dem gleichen Mittelwerte von 1,5 vH der Modellleistung des Turbogenerators rechnen kann, ein Betrag, der natürlich durch Verbesserungen der Maschinen noch weitgehend herabgedrückt werden muß. In Abb. 12 sind die

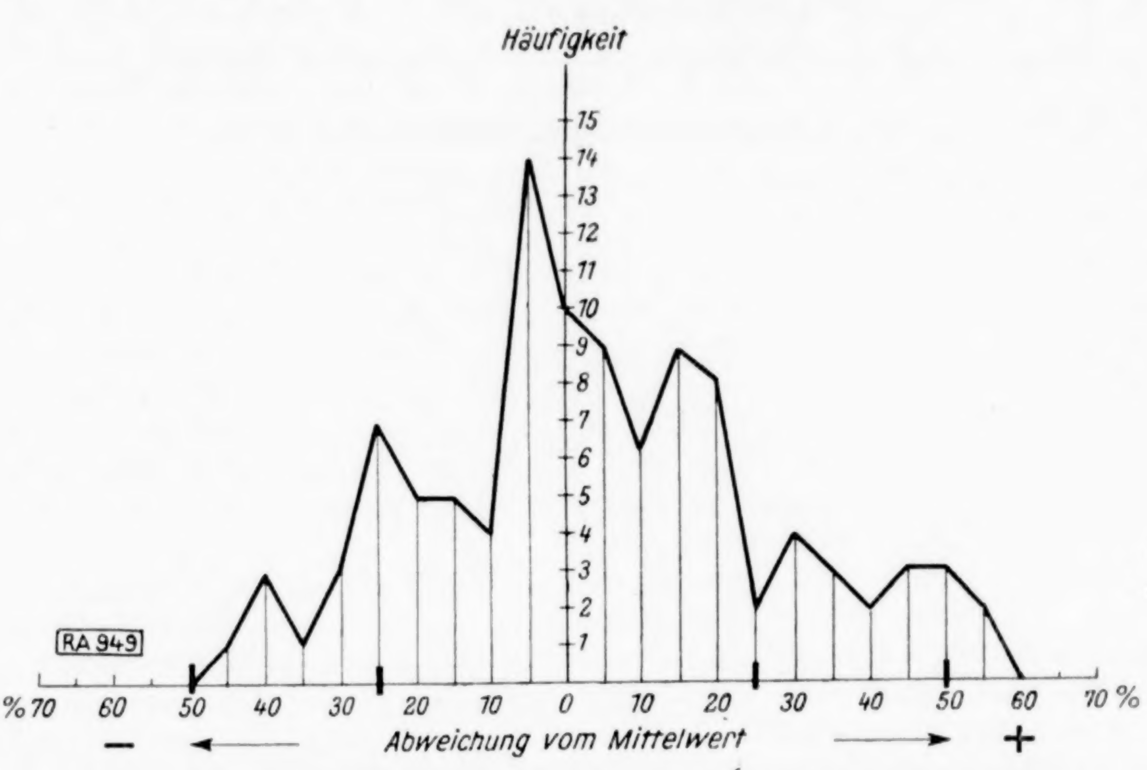


Abb. 12. Toleranzkurve der Zusatzverluste von Turbogeneratoren.

Zusatzverluste dieser Turbogeneratoren nunmehr um ihren Mittelwert herum zu einer Häufigkeitskurve aufgetragen. Sie hat denselben Verlauf wie bei anderen Verlusten und nähert sich der Gaußschen Fehlerkurve ebenfalls in beträchtlichem Maße, obgleich die untersuchten Turbogeneratoren teilweise ganz verschiedene Bauart aufwiesen. Entsprechend der Ungeregeltheit der Zusatzverluste ergibt sich hier durch Auswertung nach Gl. (4) der hohe Toleranzbetrag von $\pm$ 50 vH.

Ebenso wie die elektromagnetische Berechnung der zusätzlichen Verluste recht schwierig und noch keineswegs allgemein gelöst ist, so stellen sich auch der Messung derselben große Schwierigkeiten in den Weg. Die direkte Messung bei normaler Belastung ist nur unter besonders günstigen Umständen im Prüffeld unter Aufwendung sehr großer Mittel durchführbar. Man suchte deshalb nach einem Verfahren, die Zusatzverluste ebenso einfach wie die sonstigen regulären Verluste nach dem Verfahren der Einzelverluste im belastungsfreien Zustande der Maschinen zu ermitteln. Auf Grund von theoretischen Erwägungen schien es plausibel, daß eine einfache Summierung der Verluste von Synchronmaschinen im Leerlaufs- und im Kurzschlußzustande den Wert der wirklichen Verluste im normalen Belastungszustande ergeben könnte.

Die Unterschiede der beiden Methoden sind auf Grund etlicher mit großen Mitteln im Prüffeld durchgeführter Vergleichsversuche in Abb. 13 dargestellt. Man erkennt, daß die Leerlauf- und Kurzschlußverluste, die im belastungsfreien Zustande leicht zu ermitteln sind, mit ausreichender Genauigkeit mit den bei wirklicher Belastung der Synchronmaschinen auftretenden Verlusten übereinstimmen. Der mittlere Fehler dieser Messungen nach Gl. (2) beträgt nur 2,9 vH, die Toleranz nach Gl. (4) dementsprechend 5,8 vH. Eine größere Meßgenauigkeit als 3 vH, bezogen auf die Verluste, wird man aber bei derartigen verwickelten elektrischen Messungen an Maschinen überhaupt nicht erwarten dürfen, so daß man hiernach eine ausreichend genaue Gültigkeit der Leerlauf-Kurzschlußmethode zur Messung der Belastungsverluste annehmen darf.

Eine systematische Abweichung ist in Abb. 13 nur bei Dreieckschaltung der Synchronmaschinen vorhanden, bei denen einige Punkte ganz links im Bilde

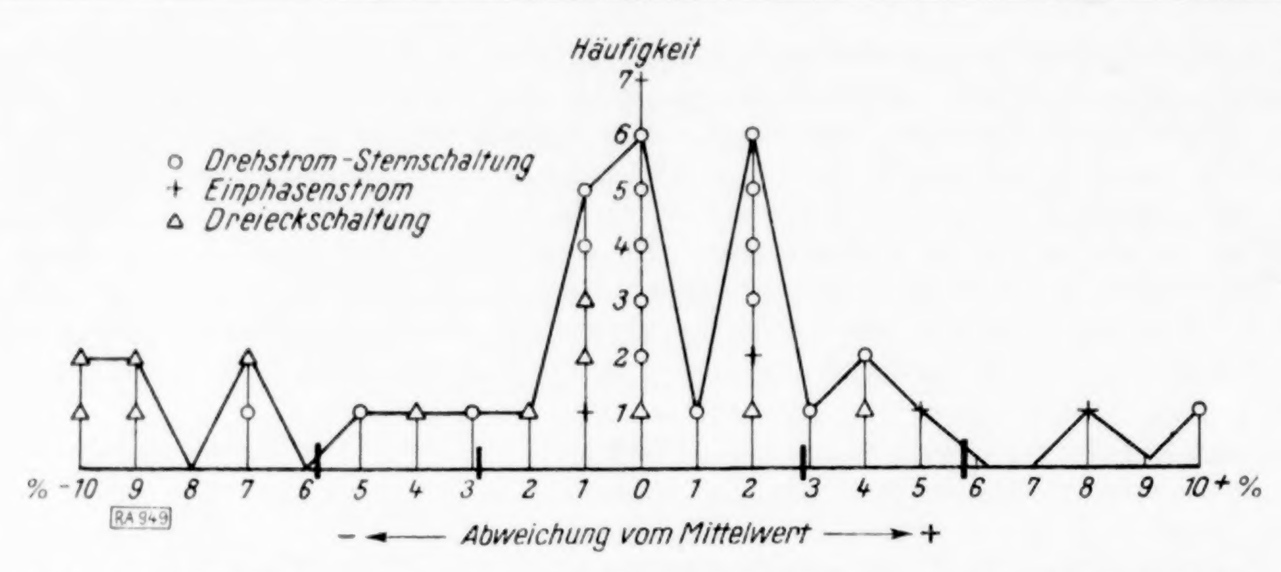


Abb. 13. Vergleich zwischen Leerlauf-Kurzschlußverlusten und Normallastverlusten.

bei 7, 9 und 10 vH Abweichung liegen, ohne ihr Spiegelbild auf der rechten Seite zu finden. Dies läßt sich nachträglich leicht durch innere Ströme in diesen geschlossenen Wicklungen erklären und bedeutet, daß man das Leerlaufkurzschluß-Meßverfahren bei Dreieckschaltung nicht ohne besondere Korrekturen anwenden darf und daß diese Schaltung überhaupt zu starker Verlustvermehrung neigt. Der Mittelwert aller anderen Punkte fällt mit ausreichender Genauigkeit in die Nähe des Nullpunktes, so daß bei der üblichen Drehstromsternschaltung und der einphasigen Schaltung der Maschinen kein prinzipieller Fehler in der vereinfachten Meßmethode enthalten ist.

Für große elektrische Anlagen ist es von Wichtigkeit, den Betrag der Stoßkurzschlußströme möglichst genau vorausberechnen zu können, der sich beim plötzlichen Auftreten eines schweren Fehlers an irgendeiner Stelle der Anlage einstellt. Die Stärke der Kurzschlußströme hängt von der Größe und Bauart der Generatoren im Kraftwerk ab. Es ergibt sich aus einer einfachen theoretischen Ueberlegung, daß der Stoßkurzschlußstrom J_s im Verhältnis zum Normalstrom J_n einerseits gegeben ist durch die relative Streuspannnng E_s/E der Maschine nach der Beziehung

$$\frac{J_s}{J_n} = \varkappa \frac{E}{E_s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

und daß der Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ andererseits, ohne Rücksicht auf zahlreiche Nebenvorgänge beim Kurzschluß, ein wenig unterhalb von 2,0 liegen muß.

Aus einer großen Zahl von Kurzschlußversuchen an Synchronmaschinen ist nun diese Stoßziffer $\varkappa$ in Abb. 14 in ihrer Häufigkeit aufgetragen, und zwar getrennt für Schenkelpolläufer, wie z. B. bei Wasserkraftgeneratoren und Kolbenkraftmaschinen, und für Zylinderläufer, wie z. B. bei Turbogeneratoren. Da es theoretisch von vornherein nicht sicher war, ob als Streuung der Maschine für die Ausbildung der

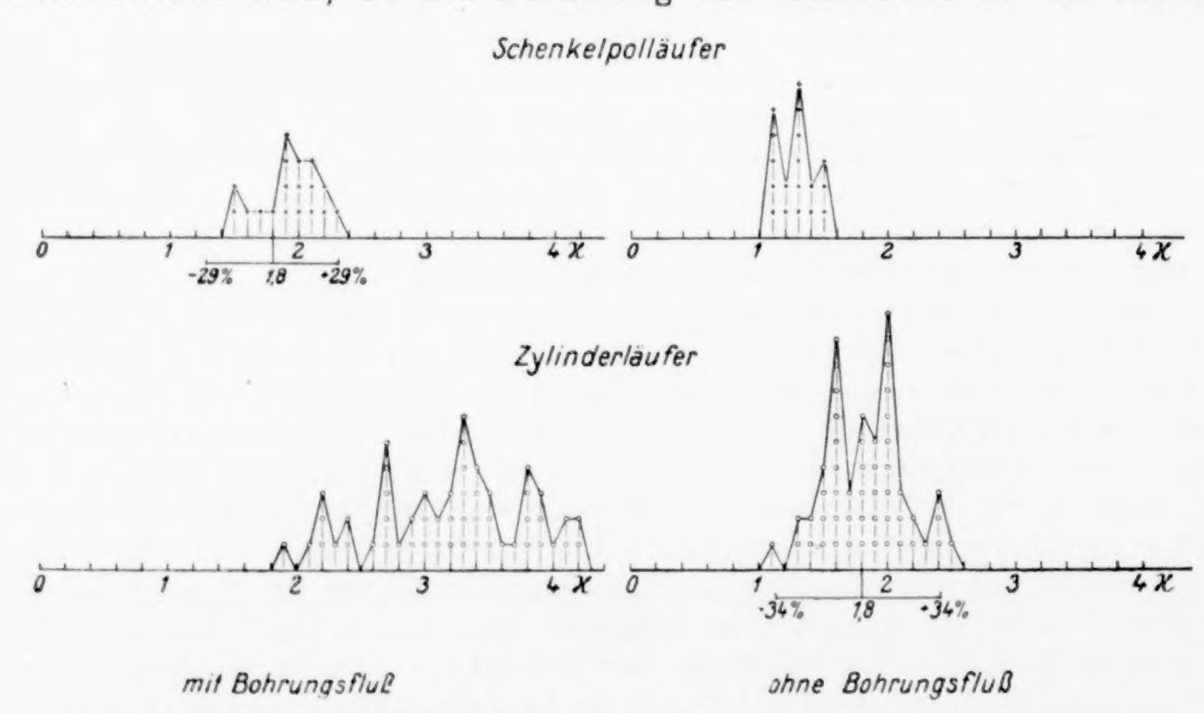


Abb. 14. Toleranzkurve für Stoßkurzschlußströme von Synchrongeneratoren.

Kurzschlußströme das Streufeld einschließlich Bohrungsfluß oder ausschließlich Bohrungsfluß in Betracht gezogen werden muß, so wurde die Auftragung in Abb. 14 für *beide Möglichkeiten* durchgeführt. Sie erfolgte so, daß das Verhältnis von Stoßstrom zu Normalstrom auf der linken Seite von Gl. (16) durch Oszillographieren ermittelt wurde, während das Verhältnis von Streuspannung zu Normalspannung auf der rechten Seite von Gl. (16) durch gesonderte Messung an der stillstehenden Maschine gewonnen wurde. Abb. 14 zeigt nun zunächst, daß der Mittelwert der Messungen *bei Schenkelpolläufern nur mit Einschluß des Bohrungsflusses, bei Zylinderläufern nur ohne Einschluß des Bohrungsflusses etwas unter 2 liegt*, und zwar ergibt sich als Mittelwert für beide Fälle 1,8. Aus diesen beiden Häufigkeitskurven ergibt sich auch mit ausreichender Uebereinstimmung eine *Toleranz dieser Stoßziffer* $\varkappa$ zur Berechnung der Kurzschlußströme von ca. $\pm$ 30 vH.

Die letzten Beispiele lehren uns, daß es bei richtiger Benutzung der Wahrscheinlichkeits- und Toleranz-Gesetze häufig möglich ist, *sehr verwickelte Vorgänge*, wie es die Ausbildung des Stoßkurzschlußstromes oder das Auftreten von Zusatz- und Kurzschlußverlusten ist, *trotzdem durch sehr einfache Berechnungsformeln zu beherrschen*. Man braucht dann von den vielen Feinheiten der physikalisch-technischen Erscheinungen keine bis ins einzelne gehende Notiz zu nehmen, sondern kann sich damit begnügen, die Messungen oder die Berechnungsformeln *nur auf die Haupterscheinungen* abzustellen. *Alle Nebenerscheinungen* führen natürlich im Einzelfalle meistens zu Abweichungen von diesen einfachen Gesetzmäßigkeiten, und da sie das Resultat in nicht vorherzusehender Weise im positiven oder negativen Sinne beeinflussen können, so lassen sie sich *durch die Angabe einer bestimmten Toleranz summarisch* wiedergeben. Gelingt es dann mit der Zeit, die Mechanik der störenden Erscheinungen klar zu legen und die Berechnungs- oder Messungs- oder Herstellungsverfahren weiter und weiter zu verfeinern, so kann man die zunächst rohen und überschlägigen Formeln alsdann verbessern und erhält dadurch unter erneuter Aufstellung von Häufigkeitskurven kleinere und kleinere Toleranzen.

5. Wirtschaftlichkeit und Sicherheit. Bei den bisherigen Beispielen kam es für den technischen Effekt meist darauf an, *den Mittelwert einer Erscheinung*, wie z. B. Kurzschlußströme, Magnetisierungsströme, Wirkungsgrade sowie Verluste aller Art mit einer bestimmten Treffwahrscheinlichkeit festzustellen. Dieses Ziel ist meistens dann vorhanden, wenn es sich um die *Wirtschaftlichkeit einer Anlage* handelt, die sich aus zahlreichen Objekten zusammensetzt, deren Abweichungen vom Mittelwert sich im großen Durchschnitt aufheben. Anders liegt das Problem jedoch bei denjenigen Erscheinungen, die die *Betriebssicherheit der Anlage* beeinflussen. Bereits bei den Kurzschlußströmen könnte man den Einwand erheben, daß nicht der mittlere Kurzschlußstrom, sondern der mögliche Höchstwert für die mechanische und thermische Festigkeit der Anlage maßgebend ist. Noch weniger kommt es auf den Mittelwert an, wenn man die *mechanische oder elektrische Festigkeit* eines Gegenstandes betrachtet.

Selbst wenn man sich bemüht, die *Ueberschlags- oder Durchschlagsfestigkeit* aller einzelnen Teile einer elektrischen Anlage möglichst *gleichmäßig* herzustellen, so gelingt dies durch die zahlreichen Ungleichmäßigkeiten in Konstruktion, Material, Herstellung und Messung in Wirklichkeit doch nie, vielmehr findet man auch beim Durchmessen relativ einfacher gleichartiger Gegenstände, daß ihre elektrische Festigkeit niemals völlig gleich groß ist. In Abb. 15 sind beispielsweise die experimentell bestimmten Ueberschlagspannungen aufgetragen, die an 20 unter sich gleichen Exemplaren

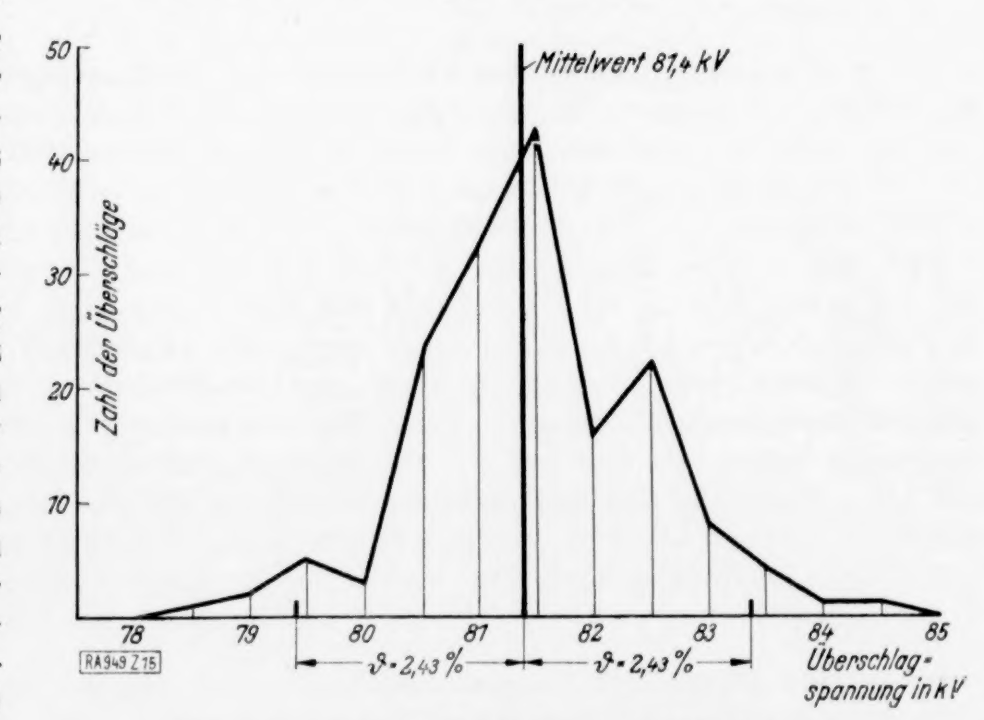


Abb. 15. Isolierfestigkeit von Stützisolatoren.

von 20 kV-Porzellanstützisolatoren gemessen wurden, wobei jeder Stützer 8 aufeinanderfolgenden Beanspruchungen nach den Meßmethoden des V. D. E. unterworfen wurde. Es zeigt sich natürlich, daß jede Messung einen etwas anderen Wert ergibt, und wenn man dieselben in der früher beschriebenen Weise zu Gruppen von je 5 kV Unterschied der Ueberschlagspannung zusammenfaßt, so ergibt die Häufigkeitskurve der Abb. 15 einen Mittelwert von 81,4 kV. Gleichzeitig ergibt die Kurve auf Grund der Auswertung nach Gl. (4) eine Toleranz der Ueberschlagsspannung von $\pm 2,43$ vH. Dieser geringe Wert für die Ungleichmäßigkeit ist darauf zurückzuführen, daß einerseits die Porzellanstützer alle demselben Brande mit dem gleichen Rohmaterial entstammten und daß sie andererseits kurz aufeinanderfolgend, also bei gleichen Luftverhältnissen, in einer ängstlich konstant gehaltenen Prüfanordnung ohne wechselnde Außeneinflüsse untersucht wurden. Wir haben also eine Einzel-Meßreihe vor uns. Durch Zusammenlegen zahlreicher solcher Meßreihen mit allen praktisch auftretenden Abweichungen erhält man für die Toleranz etwa den fünffachen Wert.

Es ist nun nötig, die Ueberschlagspannung aller Isolatoren einer elektrischen Anlage um ein erhebliches Maß über die normale Betriebsspannung zu legen, weil erfahrungsgemäß in jeder Anlage Ueberspannungen auftreten, die ein gewisses Vielfaches der Betriebsspannung erreichen. Betrachten wir einmal, nur um ein Beispiel zu haben, Ueberspannungen, die das Dreifache der Normalspannung betragen. Würden wir die Isolatoren dabei so bemessen, daß der Mittelwert ihrer Ueberschlagspannung gerade auf diesen Wert trifft, so würde beim Eintritt dieser Ueberspannungen die Hälfte aller Netzisolatoren überschlagen. Das Resultat wäre also eine schwerwiegende Störung der gesamten Anlage. Selbst wenn wir die Isolatoren so auswählen, daß ihre untere Toleranzgrenze auf den Wert der Ueberspannung fällt, so würden nach der Zahlentafel 2 immer noch 2,3 vH aller Isolatoren überschlagen. Und selbst wenn man sie so auswählt, daß das $1\,{}^1/_2$ fache oder gar 2 fache ihrer unteren Toleranzgrenze sich mit der Ueberschlagspannung deckt, so würden immer noch 0,14 vH oder ein noch geringerer Betrag beim Auftreten der Ueberspannung defekt werden.

Nun nimmt aber auf der einen Seite nach der Gaußschen Fehlerkurve, Abb. 3, die sich beim Vorhandensein sehr zahlreicher Netzisolatoren völlig mit deren Häufigkeitskurve deckt, die Gefahr des Ueberschlages bei niedrigeren Spannungen rapide ab, auf der anderen Seite nimmt erfahrungsgemäß die Häufigkeit der auftretenden Ueberspannungen mit der Höhe der Ueberspannungen ebenfalls rapide ab. Hierdurch wird es bewirkt, daß man mit höher und höher gelegener mittlerer Ueberschlagspannung der Isolatoren ein äußerst schnelles Sinken der Ueberschlagsgefahr erreicht, daß sie aber nicht etwa auf Null herabsinkt, sondern daß immer gelegentlich einmal entsprechend den Wahrscheinlichkeitsgesetzen doch noch ein Ueberschlag irgendeines Isolators erfolgen wird[1]).

Zur Feststellung der ausreichenden Isolierfestigkeit aller Isolatoren und auch aller sonstigen Teile der elektrischen Anlage ist es üblich, sie nach Beendigung der Fabrikation einer bestimmten Prüfspannung E_p zu unterwerfen, deren Höhe nach den Vorschriften des V. D. E.

$$E_p = 2{,}2\,E + 20\ \mathrm{kV}$$

ist. Sie ist also ein bestimmtes Vielfaches der Betriebsspannung E. Feste Isolatoren müssen diese Prüfspannungen 1 Minute lang aushalten, bei flüssigen und gasförmigen Isolationsmitteln darf ein Ueberschlag nur bei Ueberschreitung dieses Wertes um weitere 10 vH auftreten.

Wir sehen nun aus unserer Wahrscheinlichkeitskurve, Abb. 3, daß es gar nicht möglich ist, irgendwelche elektrischen Isolationen so zu bauen, daß unter dieser Prüf- oder Ueberschlagspannung mit Sicherheit niemals ein Durchbruch eintritt. Eine gewisse kleine Wahrscheinlichkeit bleibt auf dem linken Ast der Kurve der Abb. 3 immer noch vorhanden, auch wenn man weit über die Toleranzgrenze von $\vartheta = 1$ hinausgeht. Würde man den Mittelwert der tatsächlichen Ueberschlagspannung nur um das Maß der einfachen Toleranz über die gewährleistete oder vorgeschriebene Ueberschlagspannung legen, so würden 2,3 vH aller geprüften Isolatoren überschlagen werden. Dies ist mit Rücksicht auf die Betriebssicherheit ein viel zu hoher Wert. Es empfiehlt sich deshalb, zwischen die vorgeschriebene Prüfspannung oder die vorgeschriebene Ueberschlagspannung und den bei einer größeren Prüfungsserie gefundenen Mittelwert eine erheblich größere Spanne als die einfache Toleranz zu legen. 949

[1]) Die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Menge der beanspruchten Isolationsteile kann nach ähnlichen Gesichtspunkten behandelt werden. Vergl. hierzu H. Kath, ETZ 1904, S. 568; H. Gewecke & W. v. Krukowski, Arch. f. Elektrot. 1914, Bd. 3, S. 63.

KLEINE MITTEILUNGEN

Ueber Analogie zwischen der Kutta-Joukowskischen Auftriebformel und der Lorentz-Kraft. Zwischen den beiden erwähnten Formeln besteht eine äußerst instruktive Analogie, welche für beide Vorgänge gleich aufklärend ist: sie läßt einerseits den dynamischen Auftrieb, anderseits die magnetischen Kräfte auf Ströme viel anschaulicher hervortreten und ihren inneren Grund verstehen. Aus den Grundgleichungen des stationären Magnetfeldes im Vakuum folgt, daß $w = \mathfrak{H}_x - i\,\mathfrak{H}_y$ eine analytische Funktion ist. (Wegen rot $\mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ bestehen Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen). Dabei ist natürlich ein »ebenes« Magnetfeld gemeint. Ist in diesem Felde ein zylindrischer Stromleiter, dessen Querschnitt beliebig ist und in welchem der Strom die Richtung der z-Achse hat, vorhanden und verstehen wir jetzt unter $\mathfrak{H}$ die Feldstärke des durch Superposition des ursprünglichen (etwa homogenen) Feldes $\mathfrak{H}^*$ (U, V) und des Eigenfeldes des Stromes $\mathfrak{H}^0$ entstandenen Feldes, so berechnet sich die magnetische Kraft $\mathfrak{K}$ (X, Y) auf den Leiter aus der »Spannungstabelle« (in der Heavisideschen Form)

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_x^2), \qquad -\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y,$$
$$-\mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_x, \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2),$$

(und den Richtungscosinus der Normale

$$-\frac{dy}{ds}, \quad \frac{dx}{ds})$$

zu

$$X = -\frac{1}{2}\oint [(\mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_x^2)\,dy + 2\,\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y\,dx],$$

$$Y = -\frac{1}{2}\oint [(\mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_x^2)\,dx - 2\,\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y\,dy],$$

oder

$$X - i\,Y = \frac{1}{2\,i}\oint (\mathfrak{H}_x - i\,\mathfrak{H}_y)^2 (dx + i\,dy) = \frac{1}{2\,i}\oint w^2\,dz,$$

$(dz = dx + i\,dy)$. Es handelt sich also um die Berechnung des Residuums von $\frac{1}{2\,i}\oint w^2\,dz$. Ist das ursprüngliche Feld $\mathfrak{H}^*$ (U, V) homogen, so beginnt die Laurentsche Entwicklung von w mit $U - iV$ und hat sonst nur negative Potenzen:

$$w = U - i\,V + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Für das Eigenfeld $\mathfrak{H}_0$ gilt aber nach Biot-Savart

$$\oint \mathfrak{H}_s^0\,ds = J;$$

es muß also auch

$$\oint w\,dz = J$$

sein, somit

$$a_1 \oint \frac{dz}{z} = 2\,\pi\,i\,a_1 = J,$$

so daß man

$$w = U - i\,V + \frac{J}{2\,\pi\,i} \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

erhält.

Daraus hat man sofort:

$$\frac{1}{2\,i}\oint w^2\,dz = \frac{1}{2\,i} \cdot 2\,(U - i\,V) \cdot \frac{J}{2\,\pi\,i}\oint \frac{dz}{z}$$
$$= -\,i\,(U - i\,V)\,J,$$

oder

$$X = -J \cdot V, \qquad Y = J \cdot U, \qquad \mathfrak{K} = [\mathfrak{J}, \mathfrak{H}^*].$$

Man vergleiche damit die Ableitung der Joukowski-Formel in Riemann-Webers Differentialgleichungen der Physik (Auflage 1927 von v. Mises und Frank, Band II, S. 766 bis 68); man wird alle Einzelheiten des Beweises wiedererkennen. Der dynamische Auftrieb kommt also zustande ganz ähnlich, wie die Lorentz-Kraft erst durch Superposition des äußeren Feldes und des Eigenfeldes des Stromes entsteht, obschon dieses letzte in der Schlußformel nur durch die Gesamtstromstärke (Residuum) J vertreten ist

Zürich. W. Alexandrow. 996

Ueber eine Invariante in der Statik der Stabwerke[1]). **Ein interessanter Satz über** die Stabkräfte in Fachwerken läßt sich ableiten, indem man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen auf solche Verschiebungen anwendet, die durch gleichmäßige Erwärmung des Fachwerkes hervorgerufen werden können, also eine Aehnlichkeits-Transformation des Fachwerkes ins Auge faßt. Unserer Betrachtung werden somit nur solche Fachwerke zugrunde gelegt, die sich frei ausdehnen können.

Zu diesen gehören alle Fachwerke mit stereostatisch bestimmbaren Auflagerreaktionen und außerdem Fachwerke, die dieser Bedingung nicht genügen, aber etwa folgende Anordnung der Auflager haben: ein Auflager ist unbeweglich, und die Gleitlinien der anderen gehen durch den Mittelpunkt des unbeweglichen.

Zuerst betrachten wir Fachwerke der letztgenannten Art; diese besitzen folgende Eigenschaft: bei gleichmäßiger Erwärmung, d. h. gleichmäßiger Dehnung aller Teile verschiebt sich eine beliebige Richtung im Fachwerke, bleibt aber parallel zu sich selbst. Da bei dieser Deformation keine Aenderung der Winkel stattfindet, so ist die Arbeit der Biegungsmomente und Scheerkräfte, wenn solche auftreten, gleich Null.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein (vgl. Abb. 1):

N = Stabkraft,
l = Stablänge,
$\mathfrak{P}$ = Vektor der eingeprägten Kraft,
P = seine Größe,

[1]) Vorgetragen auf der Versammlung des Bakuer Technischen Vereins am 19. Februar 1925.

$\mathfrak{r}$ = Radius-Vektor, der von dem Stützpunkt des festliegenden Auflagers nach dem Angriffspunkte der Kraft P gezogen ist.
α = Längenausdehnungszahl,

und wenden das Prinzip der virtuellen Verschiebungen an; als solche betrachten wir, wie gesagt, die durch Erwärmung aller Teile des Fachwerks in der Zeit dt hervorgerufenen Verschiebungen.

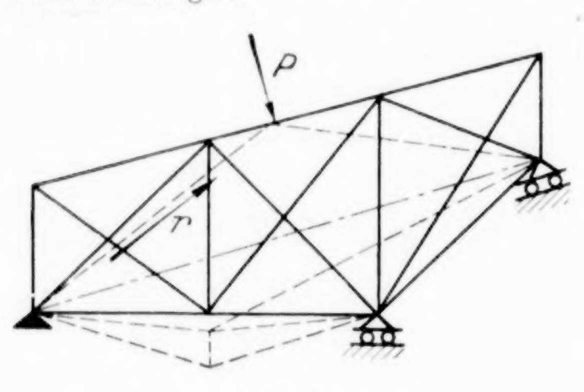


Abb. 1.

Bezeichnet dann s die Anzahl der vorhandenen Stäbe, p die Anzahl aller eingeprägten Kräfte, $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{r}$ das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ und lassen wir die Reibung bei Seite, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{s} N_i\, l_i\, \alpha\, d\,t = \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{P}_i \cdot \mathfrak{r}_i\, \alpha\, d\,t$$

oder

$$\sum_{i=1}^{s} N_i\, l_i = \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{P}_i \cdot \mathfrak{r}_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Betrachten wir nun ein anderes Fachwerk oder Stabwerk mit beliebiger Anzahl der Knotenpunkte und Stäbe, mit beliebigen Winkelversteifungen usw., kurz gesagt, ein Fachwerk anderer »Konstruktion«, für das aber das System der eingeprägten Kräfte das gleiche ist wie für das erst betrachtete und die Angriffspunkte der eingeprägten Kräfte die gleichen; und ebenso soll in denselben Punkten wie früher die gleiche Lagerung angenommen werden. (In Abb. 1 ist ein solches zweites Fachwerk gestrichelt eingezeichnet.)

Aus Gl. (1) sehen wir, daß für ein in dieser Weise angenommenes neues Fachwerk, die Summe $\Sigma N l$ den gleichen Wert besitzt, wie für das erst betrachtete und wir können somit diese Summe als eine Invariante des gegebenen Kräftesystems auffassen.

Z. B., für die Brücke Abb. 2 ist:

$$\Sigma N l = 0 \quad (\text{weil } \Sigma\, \mathfrak{P}\cdot\mathfrak{r} = 0)$$

Gehen wir nun über zu Fachwerken mit stereostatisch bestimmbaren Auflagerreaktionen, die bei gleichmäßiger Erwärmung die Richtungen ihrer Stäbe nicht beibehalten (vgl. Abb. 3). Wir können ein solches Fachwerk auf eines der früher betrachteten Art in folgender Weise zurückführen: wir zerlegen die Reaktion des Auflagers B in zwei Komponenten R und R'. Die erste habe die Richtung der Verbindungslinie BA und die zweite stehe senkrecht zu dieser Richtung. Wenn wir die Kraft R zu den eingeprägten

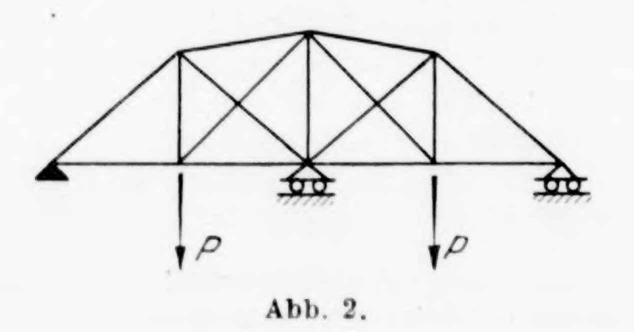


Abb. 2.

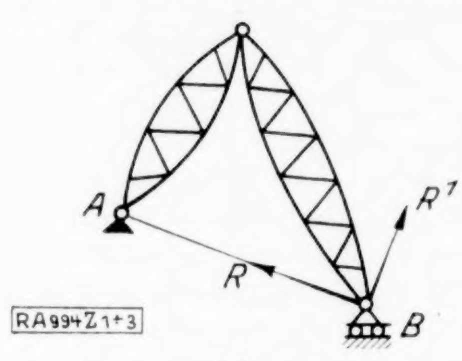


Abb. 3.

Kräften hinzunehmen, so ist dann für das Auflager B die Bedingung erfüllt, daß seine Gleitlinie durch das feste Auflager A geht, und wenn wir mit L die Entfernung der beiden Auflager bezeichnen, können wir schreiben:

$$\sum_{i=1}^{s} N_i\, l_i = \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{P}_i \cdot \mathfrak{r}_i - R\,L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Da aber die statisch bestimmbaren Reaktionen nicht von der Konstruktion des Fachwerks abhängen, sondern wieder nur von der Lagerung und den eingeprägten Kräften, so ist die Summe $\Sigma N l$ auch in diesem Falle eine Invariante in oben erklärtem Sinne.

Eine analoge Ueberlegung gilt für jede statisch bestimmbare Lagerung, da man für eine solche stets die Auflagerkräfte A, B, ... unabhängig von der Konstruktion des gelagerten Gebildes bestimmen kann. Auf der rechten Seite der Gleichung kommen dann noch die skalaren Produkte der Auflagerreaktionen in die (von einem festen Punkt aus gezählten) Radienvektoren, zu den analogen Produkten der eingeprägten Kräfte in die Radienvektoren dazu. — Da all dies nicht auf ebene Fachwerke beschränkt ist, können wir den folgenden Satz aussprechen:

»Ist ein beliebiges ebenes oder räumliches Tragwerk (d. h. Fachwerk oder Stabwerk) so gelagert, daß a) eine reine Dehnung — ohne Drehung, bei der also alle Richtungen im Tragwerk erhalten bleiben —, möglich ist, oder daß b) die Auflagerreaktionen stereostatisch bestimmbar sind, d. h. bestimmbar aus der Bedingung, daß sie zusammen mit den eingeprägten Kräften ein Gleichgewichtssystem bilden; dann besitzt bei Annahme eines bestimmten Kraftsystems $\mathfrak{P}$ die Summe der Produkte aller Stabkräfte N_i in die entsprechenden Stablängen l_i, also

$$J = \sum_{i=1}^{s} l_i\, N_i$$

einen festen Wert (Gl. (1) und (2)) unabhängig von der »Konstruktion« des Tragwerks, d. h. unabhängig von der Anzahl der Knotenpunkte, wie auch von der Anzahl und Verteilung der Stäbe und steifen Ecken, wenn nur die Art der Lagerung und die Stützpunkte beibehalten werden, sowie die Angriffspunkte, Größen und Richtungen der eingeprägten Kräfte.« — Bei der **Lagerung** a) leisten die Auflagerreaktionen bei der virtuellen Verrückung keine Arbeit, bei Lagerung b) ist die von ihnen geleistete Arbeit bekannt und tritt additiv zur Arbeit der eingeprägten Kräfte hinzu.

Baku. P. Lukin. 994

Die Verwendung der Mayor-Misesschen Abbildung in der Theoretischen Mechanik.

Die durch die Federhoferschen[1]) Arbeiten in den Blickpunkt des Interesses gerückte Behandlung der Raumgetriebe hat so recht die Bedeutung der Mayor-Misesschen Abbildung für die räumliche Kinematik erkennen lassen. Für die Raumkraftstatik wurde dieses zeichnerische Verfahren bereits vorher mit Vorteil verwendet. Die Eleganz der Mayor-Misesschen Methode verdient es, ihr auch in den Lehrbüchern und im Lehrgebäude der allgemeinen theoretischen Mechanik einen entsprechenden Platz zu sichern, um so für ihre Verbreitung auch in anderen Kreisen zu sorgen. Zu diesem Zwecke soll hier, ganz losgelöst von den technischen Anwendungen, ein Beispiel aus der theoretischen Statik nach dem neuen Verfahren behandelt werden, und zwar die folgende Aufgabe:

Eine vorgegebene Kraft $\mathfrak{P}$ ist durch ein äquivalentes System von sechs Kräften zu ersetzen, welche in den Kanten eines gegebenen Tetraeders wirken.

1. Lösung:

a) Sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_6$ die gesuchten Kräfte in den durch Abb. 1 gegebenen Tetraederkanten $1, 2, \ldots 6$ des Tetraeders A, B, C, S, so muß beispielsweise das Moment $\mathfrak{M}_A$ der Kraft $\mathfrak{P}$ bezüglich des Eckpunktes A gleich der Summe der Momente der Kräfte $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_6$ für denselben Bezugspunkt A sein, von denen die Momente $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_6$ und $\mathfrak{M}_3$ null sind, da die Wirkungslinien von $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_6$ und $\mathfrak{P}_3$ durch A gehen. Es ist also

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_4 + \mathfrak{M}_5 \quad \ldots \ldots (1).$$

Die Bilder P_2^*, P_4^*, P_5^* der Kräfte $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_4, \mathfrak{P}_5$ fallen mit denen der Tetraederkanten 2, 4 und 5, also mit $2^*, 4^*, 5^*$ zusammen und schneiden sich im Bildpunkt $\overline{SBC}$ der Tetraederfläche SBC. Die Antipolare $\overline{sbc}$ zum Bildpunkt $\overline{SBC}$ ist das Bild ν^* der Normalen ν zur Ebene SBC. Da ν auch auf 2, 4 und 5 senkrecht steht, so liegen die Antipole e_2, e_4 und e_5 der Bilder 2^*, 4^*, 5^* auf $\overline{sbc}$. Aehnliches gilt für die Bildpunkte $\overline{ABC}$, $\overline{SAB}$ und $\overline{SAC}$ der Ebenen ABC, SAB und SAC mit den dazugehörigen Antipolaren $\overline{abc}$, $\overline{sab}$ und $\overline{sac}$.

b) Da $\mathfrak{M}_2$, das Moment von $\mathfrak{P}_2$, senkrecht auf 1, 2 und 3 stehen muß, so ist sein Bildträger $\mathfrak{M}_2^*$ mit der Antipolaren $\overline{abc}$ identisch, weil diese nach obigem die Antipole e_1, e_2, e_3 der Bilder 1^*, 2^*, 3^* enthält. In gleicher Weise sind $\overline{sab}$ und $\overline{sac}$ die Bildträger $\mathfrak{M}_4^*$ und $\mathfrak{M}_5^*$ der Momentenvektoren $\mathfrak{M}_4$ und $\mathfrak{M}_5$ der Kräfte

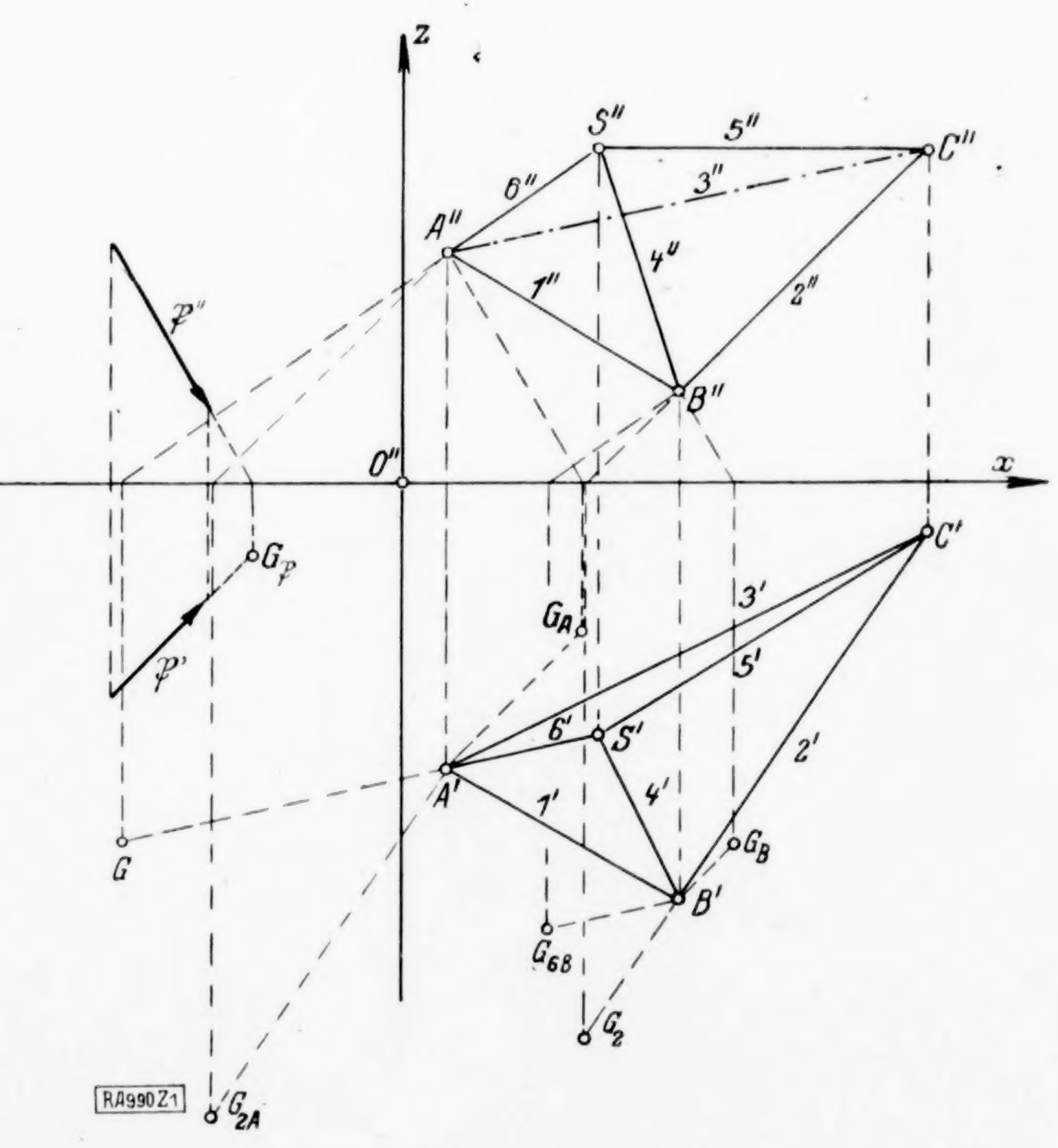


Abb. 1.

[1]) K. Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems; Wien 1928, Jul. Springer; ferner Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Kl. IIa, 138 Bd. (1929), Heft 1 u. 2, S. 27 ff.

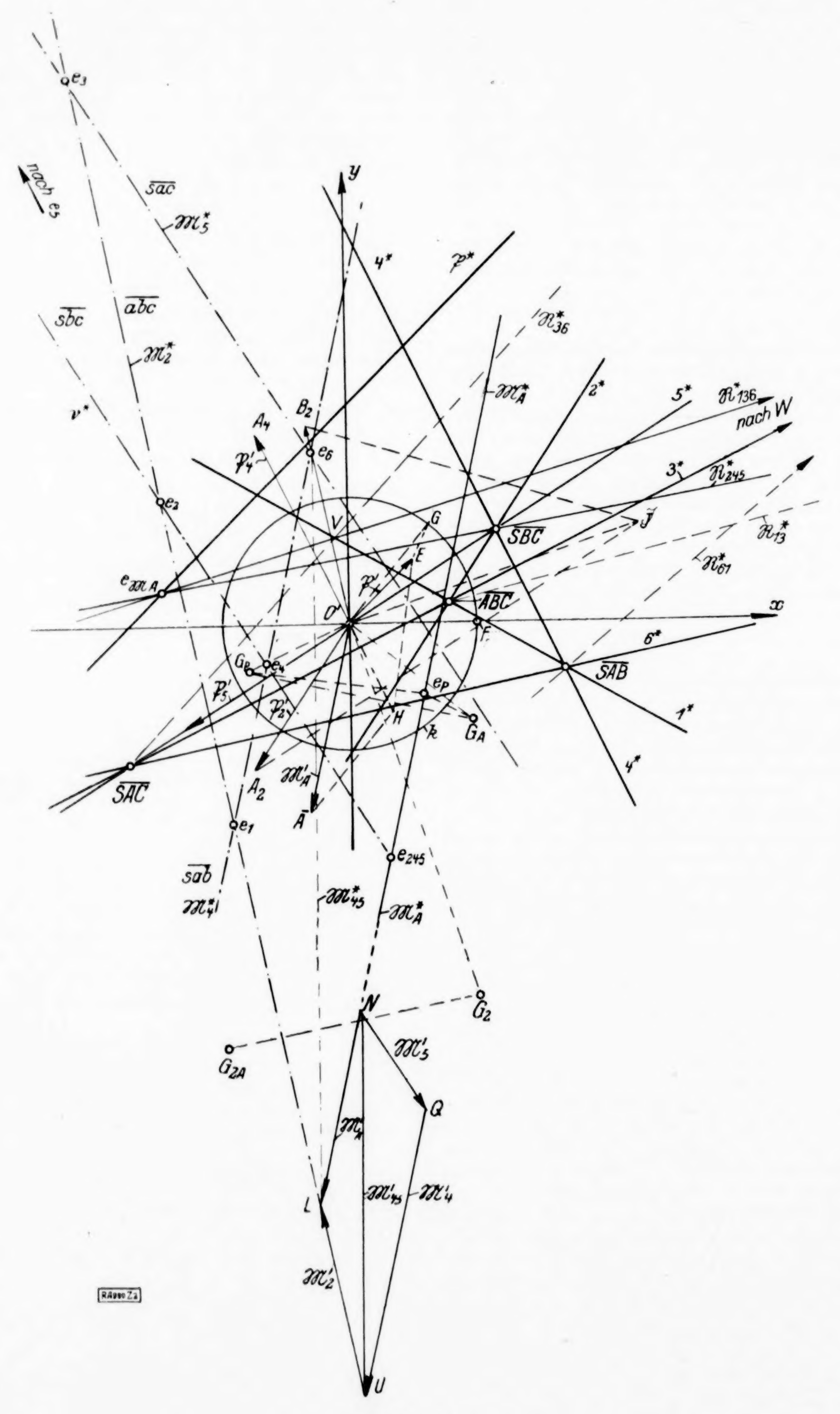

y
x
nach W
nach e5
sac
sbc
abc
sab
SBC
SAB
SAC
ABC
e3
e6
e2
e4
e1
e245
eP
G
E
F
H
V
O
A4
A2
B2
GA
G2
G2A
N
Q
L
U
1*
2*
3*
4*
5*
6*

Abb. 2.

$\mathfrak{P}_4$ und $\mathfrak{P}_5$; insbesondere muß die geometrische Summe $\mathfrak{M}_{45}^* = \mathfrak{M}_4^* + \mathfrak{M}_5^*$ durch den Schnittpunkt e_6 von $\overline{sac}$ und $\overline{sab}$ hindurchgehen. Da nach Gl. (1)

$$\mathfrak{M}_4 + \mathfrak{M}_5 = \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

ist, so muß $\mathfrak{M}_{45}^*$ gleichzeitig auch durch den Schnittpunkt L der Bilder $\mathfrak{M}_A^*$ und $\mathfrak{M}_2^*$ bzw. $-\mathfrak{M}_2^*$ hindurchgehen; d. h. $e_6 L$ ist die Wirkungslinie von $\mathfrak{M}_{45}^*$.

c) Nach diesen allgemeinen Erörterungen ist nun die Konstruktion leicht durchführbar. Man zeichnet in bekannter[1]) Weise die unter a) angegebenen Bilder $1^*, \ldots 6^*$ und $\mathfrak{P}^*$, die Antipole $e_1 \ldots e_6$ und e_P, die Antipolaren $\overline{sbc}$, $\overline{abc}$, $\overline{sab}$ und $\overline{sac}$ und die Durchstoßpunkte $g_1, g_2, \ldots g_6, g_P$ der Seiten $1, \ldots 6$ und der Kraft $\mathfrak{P}$ mit der Grundrißebene (Abbildungsebene), ferner den Durchstoßpunkt g_A der durch A zu $\mathfrak{P}$ gelegten Parallelen. $\mathfrak{M}_A' = (O'\overline{A})$ und $\mathfrak{M}_A^*$ ergeben sich dann durch folgende Konstruktion, wobei $\mathfrak{M}_A^*$ durch den Antipol e_P von $\mathfrak{P}^*$ geht und der Antipol $e_{\mathfrak{M}_A}$ von $\mathfrak{M}_A^*$ auf $\mathfrak{P}^*$ liegt. Man macht $(O'E) = \mathfrak{P}'$, fällt von E auf $e_P g_P$ das Lot, welches die in O' zu $O'g_P$ errichtete Senkrechte in H schneidet. Hierauf fällt man von E auf $e_P g_A$ das Lot, welches die in O' zu $O'g_A$ errichtete Senkrechte in G trifft. Trägt man dann in H den Vektor $(H\overline{A}) = -(O'G)$ bis $\overline{A}$ an, so ist $(O'\overline{A}) = \mathfrak{M}_A'$, welches zur Kontrolle auf $g_P g_A$ senkrecht stehen muß. Die durch e_P zu $O'\overline{A}$ gezogene Parallele ist das Bild $\mathfrak{M}_A^*$ von $\mathfrak{M}_A$, welches $\overline{abc}$ in L trifft. Macht man $(NL) = (O'\overline{A}) = \mathfrak{M}_A'$, so trifft die durch N zu $L e_6$ gezogene Parallele die Antipolare $\overline{abc}$ in U, womit $(UL) = \mathfrak{M}_2'$ und $(NU) = \mathfrak{M}_{45}'$ gefunden sind. Ferner schneiden sich die durch N und U zu $\overline{sac}$ bzw. $\overline{sab}$ gezogenen Parallelen in Q und liefern so $(NQ) = \mathfrak{M}_5'$ und $(QU) = \mathfrak{M}_4'$.

d) Aus $\mathfrak{M}_2'$, $\mathfrak{M}_4'$, $\mathfrak{M}_5'$ und aus den Spurpunkten g_2, g_4, g_5 lassen sich dann umgekehrt die Grundrißprojektionen $\mathfrak{P}_2' = (O'A_2)$, $\mathfrak{P}_4' = (O'A_4)$ und $\mathfrak{P}_5' = (O'A_5)$ der Kräfte $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_4$ und $\mathfrak{P}_5$ finden, wie Abb. 2 für $\mathfrak{P}_2'$ und $\mathfrak{P}_4'$ angibt. In Abb. 3 ist der dazugehörige Kräfteplan gezeichnet mit $(0\,1) = \mathfrak{P}'$, $(0\,2) = \mathfrak{P}_2'$, $(2\,3) = \mathfrak{P}_4'$, $(3\,4) = \mathfrak{P}_5'$, wodurch sich die Resultierende $\mathfrak{R}_{245}'$ der Kräfte $\mathfrak{P}_2'$, $\mathfrak{P}_4'$, $\mathfrak{P}_5'$ durch die Strecke $(0\,4)$ ergibt. Da $\mathfrak{M}_A$ das Moment der Kräfte in 2, 4 und 5, also auch das Moment der Kraft $\mathfrak{R}_{245}$ sein muß, so geht das Bild $\mathfrak{R}_{245}^*$ von $\mathfrak{R}_{245}$ durch den Antipol $e_{\mathfrak{M}_A}$ von $\mathfrak{M}_A^*$ und ferner auch durch den Schnittpunkt $\overline{SBC}$ der Bilder 2^*, 4^*, 5^*. Kontrolle $(0\,4)$ der Abb. 3 ist zur Verbindungslinie von $e_{\mathfrak{M}_A}$ und $\overline{SBC}$ parallel. Abb. 3 zeigt ferner die Resultierende $\mathfrak{R}_{136}' = (4\,1)$ der Kräfte $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_3'$, $\mathfrak{P}_6'$. Ihr Bild $\mathfrak{R}_{136}^*$ muß sich mit $\mathfrak{R}_{245}^*$ und $\mathfrak{P}^*$ in $e_{\mathfrak{M}_A}$ schneiden. Die durch $e_{\mathfrak{M}_A}$ zu $(4\,1)$ gezogene Parallele liefert $\mathfrak{R}_{136}^*$, welches 1^* in V schneidet. Verbindet man $\overline{SAC}$ mit V, so erhält man den Bildträger $\mathfrak{R}_{36}^*$ der Resultierenden $\mathfrak{R}_{36}$ der Kräfte $\mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_6$. Die durch 4 und 1 der Abb. 3 zu $\mathfrak{R}_{36}^*$ und 1^* gezogenen Parallelen schneiden sich in 6 und liefern $(6\,1) = \mathfrak{P}_1'$ und $(4\,6) = \mathfrak{R}_{36}'$. Zieht man noch durch 6 und 4 zu 6^* und 3^* die sich in 7 schneidenden Parallelen, so ist $(4\,7) = \mathfrak{P}_3'$ und $(7\,6) = \mathfrak{P}_6'$, womit sämtliche Kräfte $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_6$ durch ihre Grundrißprojektionen $\mathfrak{P}_1', \ldots \mathfrak{P}_6'$ bekannt sind, aus denen sich die Aufrißprojektionen $\mathfrak{P}_1'', \ldots \mathfrak{P}_6''$ leicht konstruieren lassen. Die wahren Größen findet man gemäß

$$P_i = P_i' \cdot \frac{\sqrt{h_i^2 + c^2}}{c},$$

[1]) R. v. Mises, Graphische Statik räumlicher Systeme, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1916.

K. Federhofer, Graph. Kinematik S. 2, Abb. 2 und S. 7, Abb. 6.

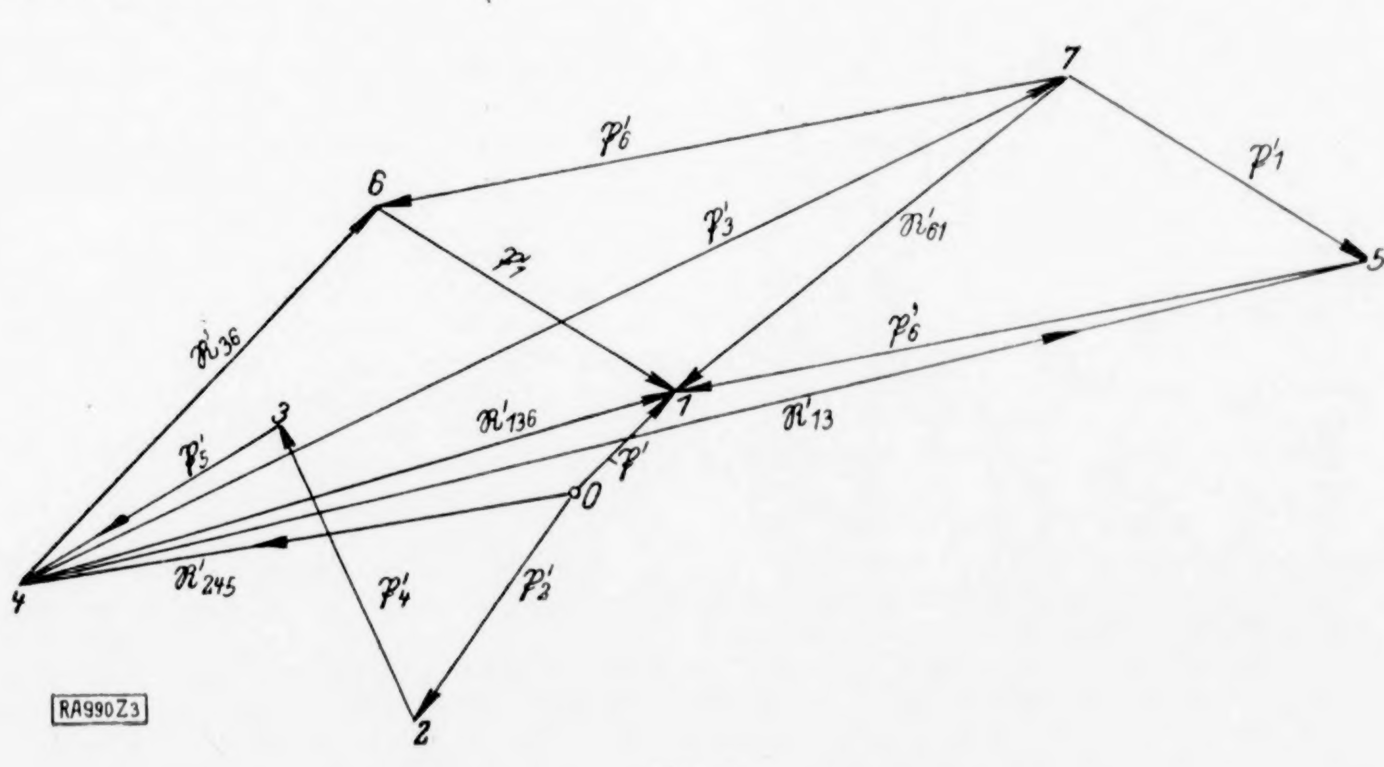


Abb. 3.

worin die h_i die Abstände der Bilder von O' und c den Radius des Abbildungskreises k bedeuten.

Kontrollen: $\mathfrak{R}_{136}{}^*$ und 3^* schneiden sich in W. Verbindet man $\overline{SAB}$ mit W, so gibt diese Linie das Bild von $\mathfrak{R}_{61}$. Die durch 1 und 4 der Abb. 3 zu $\mathfrak{R}_{61}{}^*$ und 3^* gezogenen Parallelen treffen sich ebenso in 7. Analoges gilt für $\mathfrak{R}_{13}{}^*$, welches durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{R}_{136}{}^*$ mit 6^* und durch $\overline{ABC}$ hindurchgehen muß.

2. Lösung:

Wir bilden das Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ für die Tetraederkante $BC = 2$; d. h.

$$\overline{\mathfrak{M}_{2,\mathfrak{P}}} = ([\overrightarrow{BQ}, \mathfrak{P}], \overrightarrow{BC}) = (\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}, \overrightarrow{BC}) \quad . \; (3),$$

also das skalare (innere) Produkt aus dem Momentvektor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}$ der Kraft $\mathfrak{P}$ bezüglich des Punktes B und aus dem Vektor $\overrightarrow{BC}$, wo Q ein Punkt auf der Wirkungslinie von $\mathfrak{P}$ ist. Dann muß das Kräftesystem $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_6$ bezüglich der Kante $\overrightarrow{BC}$ dasselbe Moment wie Gl. (3) besitzen, welches sich auf $(\mathfrak{M}_6, \overrightarrow{BC}) = \overline{\mathfrak{M}_{2,6}}$, also auf das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_6$ bezüglich der Kante 2 reduziert. Es ist demnach

$$\overline{\mathfrak{M}_{2,\mathfrak{P}}} = \overline{\mathfrak{M}_{2,6}} \text{ bzw. } (\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}, \overrightarrow{BC}) = (\mathfrak{M}_6, \overrightarrow{BC}) \quad (4),$$

wobei die $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{M}_6$ als statische Momente der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_6$ bezüglich B und die skalaren Produkte nach der Pragerschen Methode gefunden werden.

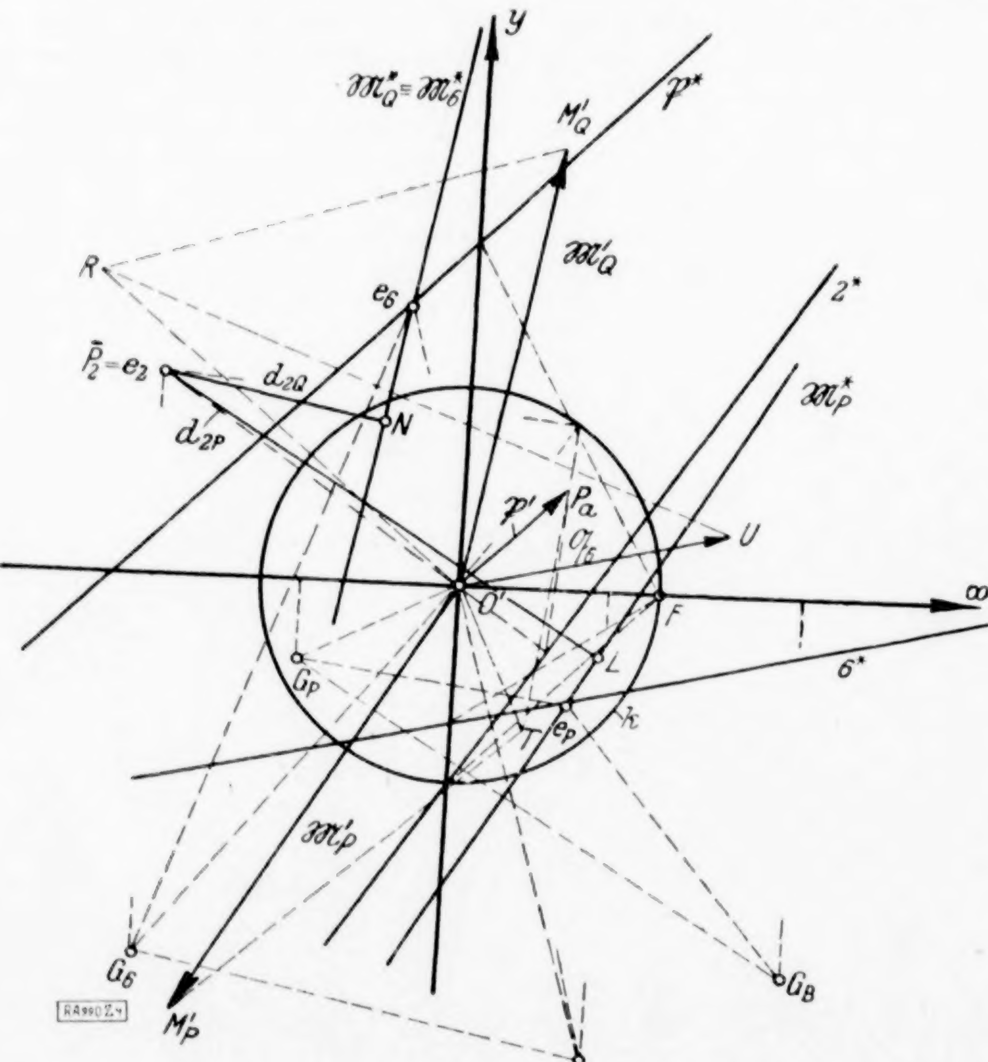


Abb. 4.

Abb. 4 zeigt die Durchführung der Konstruktion für die Kante $\overrightarrow{BC}$ bzw. für die Kraft $\mathfrak{P}_6$. Die durch B zu $\mathfrak{P}$ und $SA = 6$ gezogenen Parallelen haben die Grundrißspuren (Abbildungsebene) g_B und $g_{6,B}$; ferner ist g_6 die Grundrißspur der Seite 6 oder der Kraft $\mathfrak{P}_6$. Man macht $(O'P_a) = \mathfrak{P}'$, fällt von P_a das Lot auf $g_P e_P$ bis zum Schnitt T mit dem in O' zu $O'g_P$ errichteten Lot. Dann schneiden sich die durch T zu $O'g_B$ und durch O' zu $g_P g_B$ gelegten Senkrechten in M_P', wodurch $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}' = (O'M_P')$ und damit auch $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}{}^*$ durch e_P gefunden sind.

In gleicher Weise konstruiert man das statische Moment $\mathfrak{M}_Q$ einer in AS wirkenden und zunächst willkürlich angenommenen Kraft $\mathfrak{Q}_6$ und findet mit $(O'U) = \mathfrak{Q}'_6$ das Moment $(O'M_Q') = \mathfrak{M}_Q'$. Hierauf ermittelt man nach Prager den Bildpunkt $\overline{P_2}$ des Vektors $\overrightarrow{BC}$ und fällt von $\overline{P_2}$ aus auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}{}^*$ und $\mathfrak{M}_Q{}^*$ die Lote $\overline{P_2}L = d_{2P}$ und $\overline{P_2}N = d_{2Q}$. Dann folgt nach Prager

$$\frac{Z_2 \, \mathfrak{M}_P{}^* \, d_{2P}}{c} = \frac{Z_2 \, \mathfrak{M}_6{}^* \cdot d_{26}}{c} \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

oder

$$\mathfrak{M}_6{}^* = \frac{\mathfrak{M}_P{}^* \cdot d_{2P}}{d_{2Q}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5\,\mathrm{a}),$$

da $d_{26} = d_{2Q}$ ist. Ferner gilt wegen $P_6{}^* : Q_6{}^* = \mathfrak{M}_6{}^* : \mathfrak{M}_Q{}^*$, $O'U = Q_6 = 4$ cm (beliebig gewählt) und $\mathfrak{M}_P{}^* = \mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}'$, $\mathfrak{M}_Q{}^* = \mathfrak{M}_Q'$ für die Bildlänge $P_6{}^*$ von $\mathfrak{P}_6$

$$P_6{}^* = \frac{\mathfrak{M}_P{}^*}{\mathfrak{M}_Q{}^*} \cdot \frac{d_{2P}}{d_{2Q}} \cdot Q_6{}^*$$

$$= \frac{7{,}4}{6{,}55} \cdot \frac{7{,}52}{3{,}27} \cdot 4 = 10{,}4 \text{ cm},$$

was mit P_6' der Abb. 3 übereinstimmt. In gleicher Weise lassen sich nun auch die Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_5$ ermitteln. Statt der sechs Tetraederkanten konnten auch 6 beliebige Gerade gewählt werden, die nur keinem linearen Komplex angehören dürfen.

Rückblick:

Da jede Kraft nach obigen Betrachtungen in sechs Kräfte zerlegt werden kann, die in den sechs Tetraederkanten wirken, so gilt das gleiche für ein beliebig vorgelegtes Kräftesystem. Das alte Problem [1])

[1]) Vergl. Zeuthen, Math. Ann. Bd. 1, S. 432 (1869); Battaglini, Rendiconto della R. Accademia di Napoli, vol. 8, p. 87 (1869); vol. 9, p. 89 (1870). Marcolongo, Theoretische Mechanik, Bd. 1, S. 218 ff.

wurde somit nach einer neuen Methode graphisch gelöst und zeigte die außerordentliche Fruchtbarkeit und Anschaulichkeit des Mayor-Mises-Pragerschen Abbildungsverfahrens, das sich in gleicher Weise auf viele Probleme der theoretischen Mechanik anwenden läßt. Auch die Methoden der Darstellenden Geometrie, erinnert sei z. B. an den kürzesten Abstand zweier windschiefer Geraden, und die von R. v. Mises entwickelte Motorrechnung werden durch das Misessche Verfahren der zeichnerischen Behandlung verhältnismäßig leicht zugänglich.

Zwickau. Rudolf Beyer. 990

Differentialgleichung des Spannungszustandes eines Stabes in Motorsymbolik[1]). **Im folgenden soll die Differentialgleichung** für den in einem prismatischen Stabe bestehenden Spannungszustand in Motorsymbolik aufgestellt werden, die eine Analogie der entsprechenden skalaren Differentialgleichung der Spannung in einem Faden oder Seile darstellt.

Zunächst soll eine Beziehung zwischen den Ableitungen eines beliebigen Motors bei ruhendem und bei bewegtem Koordinatensystem bewiesen werden.

I.

Unter den antisymmetrischen Motordyaden, deren Elemente der Gleichung $A_{ik} = -A_{ki}$ genügen, soll eine besondere Klasse betrachtet werden, die durch die folgende Gleichung gekennzeichnet ist:

$$A \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Hierbei bedeuten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beliebige Motoren, A die dem Motor $\mathfrak{A}$ zugeordnete, durch diese Gleichung definierte Dyade. $\wedge$ bedeutet das Zeichen für die motorische Multiplikation der Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Innerhalb eines festen Achsensystems sei die Bewegung eines zweiten Systems, des beweglichen Achsensystems, dadurch bestimmt, daß der Anfangspunkt und die Achsenrichtungen Funktionen einer veränderlichen Größe s sind. Die Zeit t sei als eine differenzierbare Funktion von s gegeben. Die Transformationsdyade wird insofern verändert, als Δt durch $\left(\frac{d\,t}{d\,s} + \eta\right) \Delta s$ ersetzt wird, wobei $\lim\limits_{\Delta s = 0} \eta = 0$ ist. Wir betrachten einen veränderlichen Motor, den wir auf das bewegliche Achsensystem beziehen. Dieser Motor ist somit eine Funktion von s. Der Koincidenz des beweglichen und des festen Achsensystems entspreche in beiden Systemen der Wert $\mathfrak{M}$ des Motors. Dem Werte s entspreche im beweglichen Achsensystem $\mathfrak{M} + \varDelta\,\mathfrak{M}$, im ruhenden Achsensystem

$$\overline{\mathfrak{M}} = \left[E + O'\left(\frac{d\,t}{d\,s} + \eta\right) \varDelta\, s\right] (\mathfrak{M} + \varDelta\,\mathfrak{M}) .$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}}{\varDelta\, s} = \frac{\varDelta\,\mathfrak{M}}{\varDelta\, s} + O'\left(\frac{d\,t}{d\,s} + \eta\right) \mathfrak{M}$$
$$+ O'\left(\frac{d\,t}{d\,s} + \eta\right) \varDelta\,\mathfrak{M}$$

wobei O' die dem Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{G}$ des beweglichen Systems entsprechende Dyade ist; die drei Größen O', $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}$ genügen also einer zu (1) analogen Gleichung. Bei Uebergang zur Grenze ($\lim \Delta s = o$) ergibt sich

$$\frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,s} = \frac{d'\,\mathfrak{M}}{d\,s} + \mathfrak{G}\,\frac{d\,t}{d\,s} \wedge \mathfrak{M} \quad \ldots . (2).$$

Es sei bemerkt, daß man in analoger Weise als Beziehung der Motordyade erhält

$$\overline{\Pi} = \left[E + O'\left(\frac{d\,t}{d\,s} + \eta\right) \varDelta\, s\right] \wedge$$
$$(\Pi + \varDelta\,\Pi) \wedge \left[E + O'\left(\frac{d\,t}{d\,s} + \eta\right) \varDelta\, s\right]$$

und bei Grenzübergang

$$\frac{d\,\Pi}{d\,s} = \frac{d'\,\Pi}{d\,s} + \mathfrak{G}\,\frac{d\,t}{d\,s} \wedge \Pi .$$

II.

Wir betrachten einen prismatischen elastischen Stab, der durch Einwirkung äußerer Kräfte deformiert wird. In bezug auf ein festes Achsensystem x, y, z, der durch die Hauptträgheitsachsen der Querschnitte und die Zentrallinie festgelegt ist, möge sich ein zweites Achsensystem, das bewegliche System x, y, z, längs der verzerrten Zentrallinie des Stabes bewegen. Der Anfangspunkt des beweglichen Systems möge in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken durchlaufen. Seine Achsen sollen in jedem Punkte der Zentrallinie, der durch den Weg s festgelegt ist, die Richtungen der Torsion-Biegungs-Hauptachsen besitzen. Die z-Achse besitzt die Richtung der im Sinne des zunehmenden Weges s weisenden Tangente; die x-Achse stellt die Senkrechte zur z-Achse dar, wobei die (x, z)-Ebene durch die z-Achse und das Element, welches im unverzerrten Zustande aus dem, dem Wege s entsprechenden, Punkte parallel zur x-Achse läuft, festgelegt ist; die y-Achse soll mit den x- und z-Achsen ein rechtwinkliges Achsensystem bilden. Die Komponenten der Geschwindigkeit des Anfangspunktes des beweglichen Systems bezogen auf das System selbst, sind dann 0, 0, 1. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Achsensystems sind $\varkappa$, $\varkappa'$, τ, wobei $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Komponenten der Krümmung der verzerrten Zentrallinie, τ den Drall des Stabes bedeutet. Hierdurch ist der Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{G}$ des beweglichen Systems als Funktion des Weges s definiert.

Der Stab sei durch die Einwirkung eines Kraftmotors $\mathfrak{K}$ deformiert, der nebst seinem ersten Differentalquotienten eine stetige Funktion des Weges s ist, und dessen Komponenten X, Y, Z, K, K', Θ, auf die x, y, z-Achsen in dem Punkte, der durch den Weg s gegeben ist, bezogen sind. Wir betrachten in dem ver-

[1]) **R. v. Mises, »Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik« und »Anwendungen der Motorrechnung«. Diese Zeitschr., Bd. 4 (1924), Heft 2 und 3, S. 146 bis 181 und 193 bis 213.**

zerrten Stab ein beliebiges Stück, das durch zwei zur Zentrallinie senkrechte Ebenen begrenzt ist, die die Zentrallinie in den durch s und $s + \Delta s$ gekennzeichnete Punkte schneiden. Die Einwirkung des Stabteiles, der außerhalb des durch $s + \Delta s$ gekennzeichneten Normalschnittes liegt ist statisch gleichwertig einem Spannungsmotor $\mathfrak{S}$ die Einwirkung des Stabteiles der außerhalb des durch s gekennzeichneten Normalschnittes liegt, gleichwertig einem Spannungsmotor $-\mathfrak{S}_1$. Die Komponenten des Spannungsmotors sind der Reihe nach die Schubkräfte N, N', die Normalkraft T, die Biegungsmomente G, G' und das Drillungsmoment H. Damit das durch die beiden Normalschnitte begrenzte Stabstück sich im Gleichgewicht befindet, muß die Summe aller auf dieses Stück einwirkenden Kraftmotoren Null sein. Wir beziehen die Komponenten auf die x, y, z-Achsen im Punkte s. Die Transformationsdyade für das x, y, z-System in den Punkten $s + \delta s$, wobei $0 \leqq \delta s \leqq \Delta s$, ist $E + O'\left(\frac{d t}{d s} + \eta\right) \delta s$. Es ergibt sich stufenweise:

$$\left[E + O'\left(\frac{d t}{d s} + \eta\right) \Delta s\right] \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1 + \int_s^{s+\Delta s} \left[E + O'\left(\frac{d t}{d s} + \eta\right) \delta s\right] \mathfrak{K}\, d s = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1}{\Delta s} + O'\left(\frac{d t}{d s} + \eta\right) \mathfrak{S} + \frac{1}{\Delta s}\int \left\{\mathfrak{K} + O'\left(\frac{d t}{d s} + \eta\right) \mathfrak{K}\, \delta s\right\} d s = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1}{\Delta s} + O'\left(\frac{d t}{d s} + \eta\right) \mathfrak{S} + \left\{\mathfrak{K} + O'\left(\frac{d t}{d s} + \eta\right) \mathfrak{K}\, \delta s\right\} = 0.$$

Hierbei ist $s + \vartheta \Delta s$, wo $0 < \vartheta < 1$, das Argument der in der Klammer stehenden Funktion. Wir gehen zur Grenze über, indem wir Δs gegen Null konvergieren lassen und erhalten auf diese Weise

$$\frac{d' \mathfrak{S}}{d s} + \mathfrak{G} \frac{d t}{d s} \wedge \mathfrak{S} + \mathfrak{K} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

oder auf das Koordinatensystem x, y, z bezogen nach (2)

$$\frac{d \mathfrak{S}}{d s} + \mathfrak{K} = 0$$

oder auch

$$d \mathfrak{S} + \mathfrak{K}\, d s = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Die Gleichung (4) entspricht der vollkommenen formalen und inhaltlichen Analogie der Gleichgewichtsbedingungen der Elemente eines prismatischen Stabes und eines Fadens (Seiles). Die üblichen auf die Achsen x, y, z in jedem Punkte bezogenen Gleichungen[1])

$$\frac{d' N}{d s} - N' \tau + T \varkappa' + X = 0,$$
$$\frac{d' N'}{d s} - T \varkappa + N \tau + Y = 0,$$
$$\frac{d' T}{d s} - N \varkappa' + N' \varkappa + Z = 0,$$
$$\frac{d' G}{d s} - G' \tau + H \varkappa' - N' + K = 0,$$
$$\frac{d' G'}{d s} - H \varkappa + G \tau + N + K' = 0,$$
$$\frac{d' H}{d s} - G \varkappa' + G' \varkappa + \Theta = 0.$$

sind die der Motorgleichung (3) entsprechenden sechs Skalargleichungen.

Wir bemerken, daß die Gleichung (4) sich auf im Anfangszustande krumme und gedrillte Stäbe ausdehnt. Es genügt das x, y, z-System in jedem Punkte des Stabes durch ein System zu ersetzen, das durch die Hauptachsen der Querschnitte und der Tangente zur Zentrallinie festgelegt ist. Das bewegliche System wird analog wie vorher definiert.

Lodz. S. Eiger. 989

[1]) **A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität. Deutsche Ausgabe von A. Timpe, Berlin und Leipzig 1907.**

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

GEORGE D. **BIRKHOFF**, **Ph. D., Sc. D.** Professor of Mathematics Harvard University. Dynamical Systems. American Mathematical Society, Colloquium Publications Volume IX. American Mathem. Society. New York 1927. VIII + 295 S. Preis 3 $.

Das wertvolle Buch enthält die reichen Ergebnisse der langjährigen Forschungstätigkeit des Verfassers auf einem Teilgebiet der Mechanik, das heute nur wenig, in Deutschland fast gar nicht bearbeitet wird. Es handelt sich um die allgemeine Theorie der Bewegung von Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden unter dem Einfluß von Potential-Kräften. Auf den Grundlagen der Hamilton-Jacobischen Theorie hat vor allem H. Poincaré weitgehende Resultate, namentlich über die Existenz periodischer Lösungen der Differentialgleichungen, erzielt. Birkhoff geht in manchen Punkten über Poincaré hinaus. Vor allem aber ist von seinem Buche zu sagen, daß es die allgemeinen Gesichtspunkte und Zusammenhänge viel besser hervortreten läßt, als dies in irgend einer bisherigen Darstellung der Fall war. In dem klassischen Problem der drei Körper, das Ausgangspunkt und Ziel für die meisten dynamischen Theorien gebildet hat, vermag Birkhoff die fundamentalen Ergebnisse von Sundman (der unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Unmöglichkeit des Zusammenstoßes bewiesen hat) in ein neues Licht zu setzen. Hoffentlich regen die Birkhoffschen Ausführungen dazu an, diesem an sich reizvollen und in mancher Hinsicht aussichtsreichen Zweig der Mechanik verstärkte Aufmerksamkeit zuzuführen. Mises. 11

E. **STUDY,** Denken und Darstellung in Mathematik und Naturwissenschaften. Zweite verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 10 Abb. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1928. Preis geh. 3,75 M.

Der immer geistvolle Bonner Mathematiker wendet sich in diesem klug und anregend geschriebenen Büchlein gegen die übertriebene Forderung, die von Pasch aufgestellt wurde: in der Darstellung mathematischer Theorien nur völlig lückenlose Schlußketten ohne jede Abkürzung zuzulassen. Er stellt demgegenüber die Forderung, das Wesentliche der Begriffsbildungen und Beweisgänge vorzuführen, und gibt eine Reihe sehr schöner Beispiele dafür, in welcher Weise dies gemeint ist.

Mises. 11

ARTHUR **HAAS,** Dr. phil. Professor für Physik an der Universität in Wien. Atomtheorie. Mit 64 Figuren im Text und auf vier Tafeln. Zweite völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Verlag Walter de Gruyter & Co, Berlin und Leipzig 1929, VIII + 258 S., Preis 10 M., geb. 11,50 M.

Das Werk, dessen erste Auflage von 1924 hier empfehlend angezeigt wurde[1]), mußte naturgemäß infolge der außerordentlich großen Fortschritte, die die Atomtheorie in den letzten vier Jahren aufzuweisen hatte, eine völlige Umarbeitung erfahren. Der Verfasser, dessen Gabe klarer und anziehender Darstellung schon oft gerühmt worden ist, hat es verstanden, die schwierige Aufgabe vortrefflich zu lösen. Man findet in dem Buche die neuesten Theorien, die Quantenmechanik von Heisenberg, die Schrödingersche Wellenmechanik, die Diracschen Ansätze und alle experimentellen Tatsachen, die von diesen Theorien aus deutbar sind, in einer Form dargestellt, die keine umfassenden mathematischen Kenntnisse beim Leser voraussetzt. Es ist erstaunlich, wie es gleichwohl gelingt, dem Leser, wenn er nur für physikalische Erscheinungen Verständnis besitzt, einen durchaus zulänglichen Begriff von allen den Gegenständen zu geben. Selbst so schwierigen Fragen, wie etwa der der Aequivalenz zwischen Quanten- und Wellenmechanik, weicht der Autor nicht aus. Wie in seinen früheren Büchern fügt er in einem nicht allzu kurzen Anhang eine übersichtliche Zusammenfassung des Inhalts hinzu. Man wird auch diesem neuen Werk von A. Haas raschen Erfolg voraussagen dürfen.

Mises. 11

AKIRA **MIURA,** Professor an der Kaiserlichen Universität Kioto. Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Theorie und Versuch über Spannungsverteilung als Scheibenproblem mit besonderer Berücksichtigung der lokalen Störung. Mit 142 Abb. im Text und auf 6 Tafeln. Julius Springer, Berlin 1928, V + 111 S. Preis 11 M, geb. 12,50 M.

Das kleine und anspruchslos auftretende Büchlein des japanischen Forschers zeigt, wie viele interessante Fragen noch im Bereich der einfachsten Aufgaben der technischen Mechanik zu behandeln sind. Der Verfasser untersucht rechnerisch und experimentell mittels optischer Methoden die Spannungsverteilung, wie sie bei einfachen Belastungsfällen, z. B. bei einem auf zwei Stützen gelagerten, durch eine Einzelkraft beschwerten Balken, auftritt. Für die rechnerische Ermittlung werden nicht nur die elementaren Formeln, sondern auch exakte Methoden der Elastizitätstheorie herangezogen und alle errechneten Resultate in einer Fülle von Kurvenbildern veranschaulicht. Die Versuche beruhen auf den bekannten Eigenschaften der Doppelbrechung in durchsichtigen, elastisch beanspruchten Körpern. Das Buch ist reich an einzelnen Ergebnissen, die für die Dimensionierung bestimmter Bauteile, z. B. von Mauerfundamenten, wertvolle Anregungen geben können. Es wäre sehr zu wünschen, daß die Literatur der technischen Mechanik sich etwas mehr nach der Richtung, die Hr. Miura einschlägt, entwickeln würde, statt immer wieder die formellen Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Systeme und dergl. in kleinen Variationen abzuwandeln.

Mises. 11

Handbuch der Experimentalphysik. Herausgegeben von W. **WIEN**-München und F. **HARMS**-Würzburg unter Mitarbeit von H. **LENZ**-München. Bd. 7, 2. Teil: Dr. H. **OTT,** Priv.-Doz. a. d. Univ. München. Strukturbestimmung mit Röntgeninterferenzen. Mit 187 Abb. u. 7 Taf. Dr. K. F. **HERZFELD,** o. Prof. a. d. Univ. Baltimore, Gittertheorie der festen Körper. Mit 9 Abb. Akademische Verlagsges., Leipzig 1928. XII + 433 S.

Der neue Band des Wien-Harmsschen Handbuches, der in der gleich vorzüglichen Ausstattung wie die früheren erscheint, ist zum weitaus größten Teil der experimentellen Röntgenographie gewidmet. H. Ott geht von einer kurzen Erläuterung der grundlegenden Gitterbegriffe aus und entwickelt zuerst eine »wellenkinematische«, dann die »dynamische« Theorie der Röntgeninterferenzen. Sehr ausführlich wird die experimentelle Technik und die Methodik der rechnerischen Auswertung der Diagramme behandelt.

In dem zweiten Teil des Bandes gibt K. F. Herzfeld eine Einführung in die Gittertheorie, wesentlich auf Grundlagen der Bornschen Arbeiten. Dabei ist das Hauptgewicht auf eine eingehende Diskussion der einfacheren Fälle gelegt; schwierigere Fragen werden referierend behandelt.

Mises. 11

GIULIO **VIVANTI,** ord. Professor an der Universität Mailand. Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen. Uebersetzt und mit Anmerkungen versehen von Friedrich Schwank, Darmstadt. Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover 1929. XI + 296 S. Preis geh. 15,60 M, geb. 16,60 M.

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 354.

Das Buch ist eine Uebersetzung des Werkes von Vivanti, das in den bekannten »Manuali Hoepli« (Mailand) 1916 erschienen ist. Es soll kein Kompendium des ganzen Gebietes sein, sondern ist mehr als Einführung nach Art einer Vorlesung, vor allem zum Gebrauch der Studierenden, gedacht. Es beschränkt sich durchweg auf die linearen Integralgleichungen (die Begründung des Autors, daß nur von diesen sich heute eine organische Theorie aufbauen lasse, dürfte aber angesichts der sich auf Integralgleichungen beliebiger Ordnung beziehenden Volterraschen Theorie der permutablen Funktionen nicht ganz zutreffen). Die heute bereits klassischen Ergebnisse (Volterrasche und Fredholmsche Gleichungen erster und zweiter Art, Orthogonalsysteme, Eigenwerte und Eigenfunktionen, symmetrische und symmetrisierbare Kerne) werden in klarer und systematischer Weise auseinandergesetzt (die Fredholmsche Gleichung erster Art wird allerdings nur ganz kurz gestreift), so daß der Leser imstande ist, an das Studium der Originalarbeiten heranzugehen, von denen er ein ausführliches, 30 Seiten umfassendes Literaturverzeichnis vorfindet. Ein besonderes Kapitel stellt die Beziehungen zu den selbstadjungierten linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung her, zum Schluß werden Anwendungen auf die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik besprochen.

Der Uebersetzer hat das Werk in gutes und fließendes Deutsch gebracht und einige Ungenauigkeiten des Originals berichtigt. Hierin hätte er allerdings noch weiter gehen können; um nur einiges zu nennen: Das einleitende Kapitel, das die aus anderen mathematischen Disziplinen gebrauchten Kenntnisse zusammenstellt, ist, was die Theorie der analytischen Funktionen angeht, leider nicht ganz auf der Höhe. So werden z. B. die singulären Punkte einer analytischen Funktion ohne weiteres mit den Randsingularitäten der sie darstellenden Potenzreihen gleichgesetzt. Eine genauere Durcharbeitung hätte auch der Abschnitt über die Volterrasche Integralgleichung erster Art vertragen. Hier fehlt zunächst in § 29 jede Präzisierung der Voraussetzungen, die über die gegebenen und die gesuchte Funktion zu machen sind, damit das Ergebnis wirklich eine Lösung darstellt. Der § 30 aber verspricht zunächst, den Fall $K(x, x) = 0$ zu erledigen, behandelt jedoch gerade $K(x, x) \neq 0$ (unter der Voraussetzung, daß K ein Polynom ist), während $K(x, x) = 0$ in § 31 folgt. Im Original wird das dadurch verständlich, daß nach jenem Versprechen der Satz eingeschaltet ist: »Conviene riprendere la questione in generale«, den der Uebersetzer weggelassen hat, und daß überhaupt die §§ überschriftslos ineinander übergehen, während in der Uebersetzung die Ueberschriften aus dem Inhaltsverzeichnis in den Text hereingenommen sind. Bei der für so viele Anwendungen wichtigen Abelschen Integralgleichung (§ 34) hätte die gründliche Untersuchung von Tonelli (Math. Ann. 99) nutzbar gemacht werden sollen, die zum ersten Mal die Frage stellt und klärt, unter welchen Bedingungen man wirklich eine Lösung des mechanischen Problems erhält, eine Frage, die merkwürdigerweise vorher nie angeschnitten worden ist.

Trotz dieser kleinen Mängel kann das Buch zur ersten Orientierung und zum Einarbeiten in die heute so ausgiebig auch in den Anwendungen benutzte Theorie der Integralgleichungen sehr empfohlen werden.

Stuttgart. G. Doetsch. 12

Dr. EMIL **WARBURG**, Professor an der Universität Berlin, Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt a. D. Lehrbuch der Experimentalphysik für Studierende. 21. und 22. völlig neu bearbeitete Auflage. Mit 453 Originalabbildungen im Text. Verlag Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1929. XIX + 482 S. Preis geh. 14 M, geb. 155,80 M.

Das seit langer Zeit rühmlichst bekannte Lehrbuch der Experimentalphysik erscheint hier in durchgehender Neubearbeitung, die den raschen Fortschritten der Physik in den letzten 20 Jahren entspricht. Dabei ist der Charakter des Buches nicht verändert: alle Tatsachen erscheinen vom Gesichtspunkt des messenden Physikers in enger Verbindung mit den speziellen Versuchsanordnungen, die zur empirischen Ermittlung führten. Soweit theoretisch gefundene Gesetze in Betracht kommen (z. B. das Plancksche Strahlungsgesetz), sind sie als Tatsache registriert. Das Buch ist daher in erster Linie den angehenden Experimentalphysikern und denjenigen Studierenden zu empfehlen, für die die Physik als Hilfsgebiet in Frage kommt, Technikern, Chemikern usw. Wie tief die moderne Entwicklung aller physikalischen Anschauungen das Gesamtgebiet auch der messenden Physik berührt, erhellt am deutlichsten aus der Tatsache, daß auch in einem solchen rein empirisch orientierten Lehrbuch die Hinweise auf die neuen Grundlagen, die Relativitätstheorie und die Quantentheorie, nicht mehr fehlen können.

Breslau. F. Noether.

JOHN R. **CARSON**, **American Telephone and Telegraph Company. Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. Erweiterte deutsche Bearbeitung von F. OLLENDORF und K. POHLHAUSEN. Mit** 39 Abb. im Text und einer Tafel. Verlag Springer, Berlin 1929. IX + 186 S. Preis 16,50 M, geb. 18 M.

Vielen Fachgenossen wird der Sinn und die Bedeutung der Heavisideschen Operatorenrechnung, über die das vorliegende Buch aus der Hand des englischen Verfassers sowohl, wie der deutschen Bearbeiter, eine umfassende und leicht verständliche Darstellung gibt, noch wenig bekannt sein. Das Ziel der Operatorenrechnung ist ein ähnliches, aber viel weitergehendes, als das der bekannten »symbolischen« Methode der Elektrotechniker. Wäh-

rend diese auf die stationären Wechselstromvorgänge beschränkt ist, und hier einfach der Lösung inhomogener Differentialgleichungen mittels komplexer Exponentialfunktionen entspricht, leistet die Operatorenrechnung Entsprechendes auch für die nichtstationären Einschalt- und Wellenvorgänge. Während Heaviside selbst diese Lösungsform nur intuitiv, nach Analogieschlüssen, angesetzt hat, ist es das Verdienst Carsons, ihre mathematische Bedeutung völlig und auf durchsichtigem Wege klargestellt zu haben, indem er zwischen die symbolische Methode und die ihr entsprechende Anfangswertaufgabe der Differentialgleichungen eine einfache Integralgleichung zwischengeschaltet hat.

Natürlich bleibt es immer dem Gefühl des Einzelnen überlassen, ob er nun die symbolische Rechnung, die nach wie vor einige Vorsicht erfordert, oder den längeren, aber vertrauteren Weg über die in der Theorie der linearen Differentialgleichungen ausgearbeiteten Methoden wählt. In jedem Falle verdient aber vollste Anerkennung die Fülle von Aufgaben, die der Verfasser und die Bearbeiter auf dem relativ engen Raum durchgeführt haben, und die, neben der mathematischen Sicherheit, überall die enge Fühlung mit den wirklichen technischen Problemen durchblicken lassen. Aus dem Vielen seien nur die Kapitel über Strom- und Spannungswellen längs Kabeln und Leitungen, Wanderwellen längs Starkstromleitungen, Wellen längs künstlicher Leitungen, herausgegriffen. Es liegt hier ein ausgezeichnetes und mit relativ geringer Mühe verständliches Buch vor.

Breslau. F. Noether. 5

F. WITTENBAUER, Aufgaben aus der Technischen Mechanik. I. Band: Allgemeiner Teil, 896 Aufgaben nebst Lösungen. Sechste, vollständig umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Dr.-Ing. Theodor Pöschl, o. Prof. an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 601 Textabb. Julius Springer Berlin 1929. VIII + 356. Preis 14,20 M, geb. 15,60 M.

Eine für Studierende und Lehrer der technischen Mechanik gleich brauchbare Sammlung von Aufgaben (mit Lösungen!) über Statik der Kräftesysteme, sowie Gleichgewicht und Bewegung einzelner und verbundener starrer Körper, das reichlichen Uebungsstoff für die elementaren Teile dieser Gebiete zur Verfügung stellt, aber in einigen Abschnitten, wie z. B. dem über Stabilität von Bewegungszuständen, auch weitergehende Kenntnisse voraussetzt.

Der Begriff des »Massenpunktes«, der der klassischen Mechanik ursprünglich fremd war, und erst in ihrer formalen Periode und dem Beginn der »technischen« Mechanik eingeführt wurde, sollte meines Erachtens hier ganz vermieden werden. Auch hätte eine vollständige Neubearbeitung der alten, von Wittenbauer herrührenden Sammlung, wie sie hier vorliegt, altertümliche Maßsysteme (wie Wiener Fuß und Pfund, S. 146/47) besser gänzlich ausmerzen sollen. Aber das sind kleine Schönheitsfehler, die den großen Unterrichtswert der ganzen Sammlung nicht in Frage stellen.

Breslau. F. Noether. 10

R. **LUNDHOLM,** Das Rechnen mit Vektoren in der Elektrotechnik. Centraltryckeriet, Stockholm 1928. 98 S.

Dieses Buch verfolgt ein ähnliches Ziel, wie das oben besprochene von Carson-Ollendorf-Pohlhausen, dessen durchgehende begriffliche Klarheit noch einmal rühmend hervorgehoben sei. Im Gegensatz dazu zeigt die Darstellung von Lundholm, zu welchen Konsequenzen es führt, wenn ein formales Hilfsmittel, wie es die symbolische Rechnung mit Vektoren ist, zum Selbstzweck gemacht wird, ohne daß ihre begriffliche Bedeutung hervortritt. Bei den praktischen Elektrotechnikern kann dadurch meines Erachtens statt Klarheit nur Abneigung gegen Anwendung mathematischer Methoden gefördert werden, für mathematisch gerichtete Leser aber ist eine solche Darstellung gänzlich ungenießbar. Erschwerend wirkt noch, daß das von einem Ausländer in deutscher Sprache verfaßte Buch auch sprachlich keineswegs genügt.

Breslau. F. Noether. 10

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. ALFRED **LOTZE,** Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Punkt- und Vektorrechnung. Mit 7 Figuren. Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe, Bd. 13. Verlag Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig 1929. 192 S. Preis geh. 12 M, geb. 13 M.

FELIX **BERNSTEIN,** o. Professor und Direktor des Instituts für mathematische Statistik a. d. Universität Göttingen. Variations- und Erblichkeitsstatistik. Mit 7 Abbildungen. Handbuch der Vererbungswissenschaft, Bd. I. Verlag Gebr. Borntraeger, Berlin 1929. IV + 96 S. Preis 14,40 M.

Repertorium der höheren Analysis, herausgegeben von E. **SALKOWSKI,** Professor an der Techn. Hochschule Berlin. Zweite Auflage. Dritter Teilband. E. Pascal, o. Professor an der Kgl. Universität zu Neapel. Repertorium der höheren Mathematik, Bd. I. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. XII + 1598 S. Preis 22 M.

Professor A. **ADLER,** Regierungsrat, Direktor der Staatsrealschule im 7. Bezirk Wiens. Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Zweite Auflage. Verlag Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig 1929, Sammlung Göschen Nr. 423. 127 S. Preis 1,50 M.

Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart. Zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts. 1829—1929. Springer, Berlin 1929. VII + 475 S. Preis geb. 24 M.

EMIL **HATSCHEK,** Fellow of the Institute of Physics; Lektor der Kolloidchemie am Sir John Cass Technical Institute London. Die Viskosität der Flüssigkeiten. Mit 88 Figuren und 30 Tabellen im Text. Verlag Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1929. XII + 225 S. Preis geh. 13,50 M, geb. 15 M.

H. **GLAUERT,** M. A. Fellow of Trinity College Cambridge. Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Uebersetzt von Dipl.-Ing. H. Holl. Mit 115 Textabbildungen. Verlag Springer, Berlin 1929. 202 S. Preis 12,75 M, geb. 13,75 M.

MÜLLER-POUILLET, Lehrbuch der Physik. 11. Auflage. Erster Band: Mechanik und Akustik. Herausgegeben von Erich Waetzmann, Breslau. I. Teil: Mechanik punktförmiger Massen und starrer Körper. Mit 673 Figuren im Text. XVI + 848 S. 2. Teil: Elastizität und Mechanik der Flüssigkeiten und Gase. Mit 398 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. VIII + S. 849 bis 1258. 3. Teil: Akustik. Mit 393 Figuren im Text. XII + 484 S. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1929. Preis: 1. u. 2. Teil 75 M, geb. 82 M, 3. Teil: 29 M, geb. 32 M.

NACHRICHTEN

Schwingungstagung in Göttingen. Vom 23. bis 26. Mai dieses Jahres fand in Göttingen eine Tagung des VDI-Ausschusses für mechanische Schwingungen unter Vorsitz des Ausschuß-Obmanns Prof. Dr. W. Hort-Charlottenburg statt.

Die diesjährige Tagung hat keine allgemeinen theoretischen Resultate, dafür aber eine große Fülle von neuen Einsichten in technisch wichtige Schwingungsvorgänge gebracht.

Besonders interessant waren die drei Vorträge, die den Schwingungsaufgaben der Flugtechnik gewidmet waren. Küßner-Adlershof behandelte in einem sehr bemerkenswerten Vortrag die angefachten Tragflügelschwingungen auf theoretischem Wege, wobei er nicht nur eine einwandfreie Erledigung der Biegeschwingungen und der Torsionsschwingungen sowie der Querruderschwingungen mitteilen konnte, sondern auch auf die auftretenden Kopplungserscheinungen einging. Derselbe umfangreiche Fragenkomplex wurde auf Grund von Versuchen im Windkanal und Beobachtungen im fliegenden Flugzeug von Frau Essers-Kober-Adlershof behandelt. — Liebers-Adlershof hat die schwierige Frage der Luftschraubenschwingungen untersucht und gezeigt, daß nicht die Torsionsschwingungen, sondern die Biegungsschwingungen (bzw. die gekoppelten Torsions- und Biegungsschwingungen) für die häufigen Brüche von Metallpropellern verantwortlich sind; auch gelang es, die Erklärung dafür zu geben, daß erfahrungsgemäß stets solche Propeller zu Bruche gehen, deren Flügel infolge ihrer Einbaulage während einer einzigen Umdrehung zweimal angeregt werden.

Schuler-Göttingen hat die Theorie des Frahmschen Schlingertanks unter Berücksichtigung der Reibungskopplung entwickelt; der neuen, einwandfreien Theorie gelingt ohne Schwierigkeit, die Erklärung dafür zu liefern, daß der Schlingertank unter ganz bestimmten Umständen völlig versagt. Als Abhilfe schlägt Schuler die Anordnung zweier gegeneinander verstimmter Schlingertanks nebeneinander vor. Bekanntlich hat Schuler schon vor Jahren für den Schlinkschen Schiffskreisel ebenfalls die exakte Theorie entwickelt und gegen das Versagen bei bestimmter Wendegeschwindigkeit des Schiffes die Anordnung zweier gekoppelter Kreisel vorgeschlagen. Beide Probleme konnten die Teilnehmer im Institut für angewandte Mathematik auch an Modellen studieren.

Den Fragen der Raumakustik waren zwei Vorträge gewidmet. K. Schuster-Breslau berichtete über seine gemeinschaftlich mit E. Wätzmann durchgeführte Untersuchung über die Nachhalldauer in zylinder-, rechteckigen parallelepiped- und kugelförmigen Räumen; hier gelang es zum erstenmal, diese für die Hörsamkeit wichtige Größe auf Grund der exakten Behandlung der Randwertaufgabe zu bestimmen und dadurch die allgemeine Approximationsmethode von Jäger und Sabine theoretisch nachzuprüfen. Die Abweichungen, die sich dabei ergaben, sind unerheblich, so daß die Sabinesche Formel als brauchbar bezeichnet werden kann. — Die Abhängigkeit der Nachhalldauer von der Oberflächenbeschaffenheit der Wände wurde auf experimentellem Wege von E. Meyer-Charlottenburg behandelt, dem erstmalig eine objektive Methode zur experimentellen Bestimmung der Nachhalldauer geglückt ist. Er hat sich sogenannter Heultöne bedient (das sind Bänder von allen Tönen zwischen bestimmten Frequenzgrenzen), wodurch die störende Wirkung von Interferenzerscheinungen ausgeschaltet wird. Die Heultöne wurden durch einen am Ueberlagerungssummer angeschlossenen Lautsprecher erzeugt, und der nach Abschaltung des Lautsprechers einsetzende Nachhall wurde von einem Mikrophon nebst Verstärker aufgenommen und registriert. Die erhaltenen Nachhallkurven sind in gutem Einklang mit dem Sabineschen Gesetz. Es hat sich ferner gezeigt, daß die Nachhallzeit stark frequenzabhängig ist.

Der gesamte Fragenkomplex des Verkehrslärms und der Verkehrserschütterungen wurde durch einen zusammenfassenden Vortrag von W. Hort-Charlottenburg beleuchtet. Erste Forderung für die erfolgreiche Bekämpfung des Verkehrslärms ist, wie er dargelegt hat, die wissenschaftliche Erforschung der Zusammenhänge, insbesondere die Analyse der Schwingungsvorgänge bei Erschütterungen. Er gab auch eine Uebersicht über die vorläufigen praktischen Bekämpfungsmaßnahmen, die

zu einer lebhaften Aussprache Veranlassung gab. — Die bisher bekannten Methoden der Analyse von Erschütterungsschwingungen und Geräuschen und neuere Resultate, die mit diesen Methoden erzielt wurden, wurden von Pauli-Charlottenburg behandelt. Lübcke-Charlottenburg behandelte die Analyse von Schiffsgeräuschen mit einer neuen, sinnreichen Methode, die auf der Anwendung des Kapazitäts-Mikrophons zur Elektronensteuerung des Registriervorganges beruht, so daß der letztere dem zu untersuchenden Schwingungsvorgang keine Leistung abfordert. Diese neue Methode dürfte sich, wie einer der Diskussionsredner hervorhob, auch für andere Zwecke, insbesondere zur Untersuchung der Straßengeräusche eignen. Lübcke sprach ferner über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Meereswasser.

Gerdien-Charlottenburg sprach über einen neuen Apparat zur Untersuchung der Dauerfestigkeit von Leichtmetall gegen Biegungsschwingungen. — Späth-Duisburg brachte einen Beitrag zur Frage des Auswuchtens. — Hermann Hort-Charlottenburg sprach über eine Stoßdämpfeinrichtung für Förderseile, mit deren Hilfe man die dynamischen Ueberbeanspruchungen der Förderseile herabzusetzen und gleichzeitig zu überwachen vermag. Eichelberg-Zürich erörterte dynamische Vorgänge in Dampf- und Gasleitungen.

In dem Institut für Erdbebenforschung führte Prof. Angenheister an Hand eines Vortrags über Erdbebenwellen die Geräte zur Untersuchung von natürlichen und künstlichen Erdbeben vor. Außerdem fand eine Besichtigung des Instituts für Strömungsforschung und des Instituts für angewandte Mechanik statt. In letzterem hatten die Teilnehmer Gelegenheit, außer den bereits erwähnten Schulerschen Modellversuchen und vielen anderen dynamischen Modellen und Geräten die spannungsoptischen Untersuchungsmethoden durch einen interessanten Vorführungsvortrag von Mesmer-Göttingen kennen zu lernen. Zum Schluß hat Schuler-Göttingen in der Sternwarte sein Pendel mit konstanter Schwingungszahl gezeigt und erläutert. Die Neuerungen dieses Pendels, von welchen eine außerordentliche Erhöhung der Genauigkeit gegenüber allen bisherigen Normaluhren erwartet wird, sind: 1. Anordnung zweier Massen in einer solchen Lage, die das Extremen der Schwingungszahl liefert; 2. Das Pendel schwingt in einem mit einem Leichtgas mit äußerst geringer Zähigkeit gefüllten Kasten; 3. Ein Uhrwerk ist nicht vorhanden, sondern die Schwingungszahl des Pendels wird nur zur Kontrolle und Berichtigung der elektrischen Uhren benutzt; 4. Die infolge der Maßnahmen 2. und 3. schon sehr geringfügigen Energiemengen, die zum Antrieb erforderlich sind, werden in denkbar gleichmäßiger Dosierung zugeführt, indem sie von der elektrischen Normaluhr abgenommen werden. —

Die Tagung hat jedem Teilnehmer nicht nur eine Erweiterung und Vertiefung seiner Kenntnisse sondern auch eine große Fülle wertvoller Anregungen für seine weitere Tätigkeit gegeben[1]).

Berlin. P. Neményi. 3

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Hauptversammlung in Prag.

Im Rahmen des fünften Deutschen Mathematiker- und Physikertages findet die diesjährige Hauptversammlung der Gesellschaft vom 15. bis 20. September in Prag statt.

Montag, den 16. September vormittags spricht in der allgemeinen Sitzung R. v. Mises-Berlin über »Kausale und statistische Gesetzmäßigkeit in der Physik«.

Für die Fachsitzungen der Gesellschaft sind folgende Vorträge vorgesehen:

Montag, den 16. September nachmittags:

L. Föppl, München: Ueber singuläre Punkte im ebenen Spannungszustand.

M. Sadowsky, Berlin: Ersatz einer homogenen isotropen Scheibe mit beliebiger Poissonschen Konstanten durch ein Fachwerk.

N. Muschelišvili, Tiflis: Ein Problem aus der Theorie der Platten.

E. Schwerin, Berlin: Ueber Spannungen und Formänderungen kreisringförmiger Membranen.

F. Krauß, Aachen: Grundgleichungen der Schalentheorie.

Dienstag, den 17. September vormittags:

H. Reißner, Berlin: Torsionsschwingungen mit Berücksichtigung der Dämpfung.

K. Karas, Brünn: Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen mit Längsbelastung und Kreiselwirkung.

H. Pollaczek-Geiringer, Berlin: Zur Theorie der Stabwerke.

P. Neményi, Berlin: Eine neue Singularitätenmethode für die Elastizitätstheorie.

H. Schmidt, Köthen: Ueber einige Anwendungen eines Unstetigkeitsfaktors in der Mechanik.

G. Zerkowitz, München: Zur praktischen Berechnung von Biegungsschwingungen.

Dienstag, den 17. September nachmittags:

H. G. Küßner, Berlin: Flügelschwingungen von Flugzeugen.

K. Friedrichs und Th. Troller, Aachen: Beitrag zur Schraubentheorie.

J. Nikuradse, Göttingen: Neuere Versuche über turbulente Rohrströmungen.

A. Busemann, Göttingen: Drücke auf kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit Ueberschallgeschwindigkeit.

---

[1]) Die gehaltenen Vorträge erscheinen Ztschr. f. techn. Physik 10 (1929), Septemberheft.

I. Lotz, Hannover: Die Wärmeleitung im endlich langen Kreiszylinder unter besonderen Randbedingungen.

Donnerstag, den 19. September vormittags (Gemeinsam mit der DMV):

R. Iglisch, Berlin: Schwingungsprobleme und nichtlineare Integralgleichungen.

W. Sternberg, Breslau: Ueber die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

E. Tornier, Köthen: Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

F. Bernstein, Göttingen: Ueber die Anwendung der Steinerschen Fläche der Erblichkeitslehre insbes. in der Theorie der Blutgruppen.

A. Basch, Wien: Vektorische Fehlertheorie und geodätische Fehlerübertragung.

M. Herzberger, Jena: Versuch eines systematischen Aufbaues der geometrischen Optik mit Hilfe eines allgemeinen Satzes.

Donnerstag, den 19. September nachmittags (Gemeinsam mit der DMV):

F. Ringleb, Jena: Ueber ebene Potentialströmungen.

W. Müller, Hannover: Die Bewegung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit unter dem Einfluß von ebenen Wänden.

K. Uller, Gießen: Die geführten Wellen in fließenden Mitteln.

F. Weinig, Berlin: Widerstands- und Tragflügelprofile mit vorgeschriebener Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche.

F. Noether, Breslau: Bemerkungen zur Oseenschen Hydrodyamik.

Freitag, den 20. September vormittags (in der Sitzung der Ges. f. Techn. Physik):

A. Korn, Berlin: Automatische Herstellung von Lochkarten für die Jaquard-Weberei.

M. Schuler, Göttingen: Ein neues Pendel mit unveränderlicher Schwingungszeit.

Die Geschäftssitzung der Gesellschaft findet Mittwoch, den 18. September vormittags 9^{30} Uhr statt. Hieran anschließend (gemeinsam mit der DMV) ein Vortrag von Hrn. F. Bernstein-Göttingen: Variations- und Erblichkeitsstatistik.

Ortsgruppe Berlin.

In einer reich besuchten Sitzung am 19. Juli sprachen Frau Privatdzt. Dr. H. Pollaczek-Geiringer-Berlin über Theorie der Stabwerke und Hr. Dr. P. Neményi-Berlin über eine neue Singularitätenmethode für die Theorie der Platten- und Balkenbiegung.

Deutscher Ausschuß für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Der unter Leitung von Prof. Dr. Konen in Bonn stehende Ausschuß hat am 20. April ds. Js. zur Neuordnung des Studiums des mathematischen und naturwissenschaftlichen höheren Lehramts die folgenden Leitsätze beschlossen, auf deren Veröffentlichung er Wert legt:

1. Das fachwissenschaftliche Studium an der Universität und Technischen Hochschule ist das Rückgrat der Ausbildung der Philologen.
2. Die Prüfungsordnung für die wissenschaftliche Prüfung für das höhere Lehramt erstreckt sich auf eine Gruppe von sachlich und methodisch zusammengehörenden Fächern, von denen eines als Kernfach hervortritt.

   Der Unterschied der Lehrbefähigung für verschiedene Unterrichtsstufen fällt weg.
3. In Studium und Prüfung tritt neben Philosophie als verbindliches Fach die Erziehungswissenschaft.

   Die Ausbildung in praktischer Pädagogik fällt ausschließlich in die Referendarzeit.

   Die Vorschläge haben die Voraussetzung, daß an den Hochschulen die notwendigen Einrichtungen geschaffen werden, insbesondere die zur Durchführung des Studiums der theoretischen Erziehungswissenschaft an den Universitäten und Technischen Hochschulen notwendigen Lehrstühle, sie werden mit allem Nachdruck gefordert, wo sie noch nicht vorhanden sind.
4. Eine völlige oder begrenzte Ausbildung der künftigen Philologen an den pädagogischen Akademien wird grundsätzlich abgelehnt.

Persönliches. Anläßlich der Eröffnung des Aerodynamischen Instituts in Aachen wurden zu Ehrendoktoren promoviert: Hr. Prof. H. Reißner-Charlottenburg, Hr. Prof. K. Körner-Prag, Hr. Prof. T. Levi-Civita-Rom, Hr. Prof. G. J. Taylor-Cambridge und Hr. Prof. Baron Chuzaburo Shiba-Tokio.

Die Technische Hochschule Danzig hat aus Anlaß ihres 25jährigen Jubiläums u. a. zu Ehren-Doktoren promoviert: Hrn. Prof. Dr. C. W. Oseen in Upsala, Hrn. Prof. Dr. W. Nußelt in München.

Der Verein deutscher Ingenieure hat auf seiner Hauptversammlung in Königsberg Hrn. Prof. Dr. L. Prandtl die Grashof-Denkmünze verliehen.

(Redaktionsschluß 15. August 1929.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.